**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ» В Г. РТИЩЕВО
(ФИЛИАЛ СамГУПС В Г. РТИЩЕВО)**

МАТЕМАТИКА

Задания на контрольную работу

и методические рекомендации

по выполнению работы для студентов

заочной формы обучения

специальности

23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог

2018 г.

Одобрено
цикловой комиссией
математических, естественнонаучных
и общепрофессиональных дисциплин
протокол №5 от «15» марта 2018 г.
Председатель ЦК
___________ Луконина Н.С.

Утверждаю
Зам. директора по УР
___________А.А. Елисеева
«16» 03 2018 г.

Автор: Н.С.Луконина – преподаватель филиала СамГУПС в г. Ртищево

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Методические рекомендации по выполнению контрольной работы по математике предназначены для студентов первого курса заочной формы обучения специальности 23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог.

Решение задач по математике у студентов-заочников техникумов часто сопряжено со многими трудностями. Помочь учащемуся преодолевать эти трудности, научить применять теоретические знания к решению задач по математике – основное назначение настоящего пособия.

В каждой теме приведены краткие теоретические сведения, описаны приемы решения типовых задач, дана их классификация и образцы записи решений, а затем следуют задачи для самостоятельного выполнения контрольной работы. Такая форма изложения позволяет учащемуся сначала познакомиться с приемами решения типовых задач и оформлением записи их решений, а затем приступить к выработке навыков в их самостоятельном решении.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время математика и ее методы широко используются при решении научно-технических проблем и народнохозяйственных задач. Происходит математизация всех наук, математика глубоко проникает во все отрасли народного хозяйства. Математические методы позволяют решать проблемы планирования производства и расшифровывать древние рукописи, проверять качество проектов и организовывать движение транспорта, прокладывать каналы и запускать космические корабли.

Математика является одной из таких наук, развитие которых служит необходимым условием ускорения научно-технического прогресса и повышение эффективности других наук.

Основная задача дисциплины «Математика» для средних специальных заведений состоит в том, чтобы вооружить студентов основами математических знаний, умений и навыков в объеме, необходимом для их повседневной практической деятельности, для усвоения общетехнических и специальных предметов, а также для дальнейшего повышения квалификации путем самообразования. Учебным планом предусмотрена дисциплина «Математика» с объемом 70 часов аудиторных занятий при дневной форме обучения; при заочной форме обучения студент- заочник самостоятельно работает над этим программным учебным материалом и только 17 часов отводится на установочные и практические занятия под руководством преподавателя.

В результате изучения дисциплины студент

должен иметь представление:

– о роли и месте математики в современном мире, общности ее понятий и представлений;

должен знать:

– основные понятия и методы линейной алгебры, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики;

– основные численные методы решения прикладных задач;

должен уметь:

– использовать методы линейной алгебры;

– решать основные прикладные задачи численными методами.

Данные методические указания ставят своей целью оказание помощи студентам- заочникам в организации их самостоятельной работы, содержат разъяснения некоторых теоретических положений для решения примеров и задач, способов их решения, вопросы для самопроверки, задания на контрольную работу.

Рекомендуется следующая последовательность изучения материала

1. Ознакомиться с содержанием программы.
2. Изучить материал по указанной в методических указаниях литературе.
3. Ответить на вопросы для самопроверки.
4. Закрепить усвоение материала путем разбора решенных задач в данных методических указаниях, на практических занятиях, в учебнике.
5. Приступить к решению задач контрольной работы, предварительно изучив материал, касающийся содержания задач.

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

Контрольные работы следует выполнять самостоятельно и лишь после того, как проработан соответствующий теоретический материал и решен необходимый минимум задач. Так как каждой теме соответствует задача или упражнение, то контрольную работу следует выполнять постепенно по мере изучения материала.

При решении задач следует обосновать каждый шаг решения, исходя из теоретических основ курса. Не следует применять формулы, которые не входят в программу. Решение должно быть доведено до окончательного ответа.

1. Каждая работа выполняется в отдельной тетради школьного формата. Следует пронумеровать страницы и оставить на них поля не менее 3 см для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради должен быть приклеен титульный лист утвержденного образца или аккуратно записаны все данные титульного листа: шифр, специальность, фамилия, имя, отчество учащегося, дисциплина и номер работы.
3. Работа должна быть выполнена чернилами одного цвета, аккуратно и разборчиво.

4. Каждую задачу надо начинать с новой страницы.

5. Решение задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании.

6. Условия задач должны быть обязательно переписаны полностью в контрольную тетрадь; к геометрическим задачам, кроме того, дается установленная краткая запись условия.

7. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять общие требования к культуре их ведения.

8. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.

9. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб.

10. В конце работы следует указать литературу, которой вы пользовались, проставить дату выполнения работы и подпись.

11. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то учащийся должен выполнить все указания преподавателя, сделанные в рецензии.

12. Контрольные работы должны быть выполнены в срок (в соответствии с учебным планом-графиком).

13. Работа, выполненная не по своему варианту, не учитывается и возвращается учащемуся без оценки.

14. Учащиеся, не имеющие зачета по контрольной работе, к экзамену не допускаются.

15. Во время экзамена зачтенные контрольные работы представляются преподавателю вместе с данными методическими указаниями.

16. Каждая контрольная работа имеет 10 вариантов. Номер варианта определяется последней цифрой шифра студента.

В процессе изучения дисциплины студент-заочник должен выполнить одну контрольную работу.

После выполнения контрольной работы и практических занятий в сроки, предусмотренные учебным графиком, для проверки знаний студентов проводится экзамен по дисциплине «Математика».

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Введение

История возникновения, развития и становления математики как основополагающей дисциплины, необходимой для изучения профессиональных дисциплин. Цели, задачи математики. Связь математики с общепрофессиональными и специальными дисциплинами.

Студент должен иметь представление:

– о роли математики при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин в профессиональной деятельности.

Раздел 1. Линейная алгебра

Тема 1.1 Комплексные числа

Комплексные числа и их геометрическая интерпретация. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической и тригонометрической формах. Показательная форма записи комплексного числа.

Студент должен знать:

– определения комплексного числа, мнимой единицы, мнимой и действительной части комплексного числа;

– сложение и умножение комплексных чисел и действия, обратные к ним;

– формы записи комплексных чисел.

Студент должен уметь:

– выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме;

– выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме;

– выполнять действия над комплексными числами в показательной форме.

Раздел 2 Основы дискретной математики

Тема 2.1 Основы теории множеств

Множество и его элементы. Изображение множеств с помощью кругов Эйлера. Операции над множествами. Выполнение операций над множествами.

Студент должен иметь представление:

– о способах задания множеств;

– о диаграммах Эйлера.

Студент должен знать:

– определения: множества, отношения;

– операции и свойства операций над множествами;

– свойства отношений.

Тема 2.2 Основы теории графов

История возникновения понятия «граф». Основные понятия теории графов. Изображение графа на плоскости. Применение теории графов при решении профессиональных задач.

Студент должен иметь представление:

– о связи понятия графов и понятия отношения.

Студент должен знать:

– определение графов и его элементов;

– виды графов и операции над ними.

Раздел 3 Математический анализ

Тема 3.1 Дифференциальное и интегральное исчисление

Производная функции. Производные высших порядков. Интегрирование функций. Неопределенный и определенный интеграл.

Студент должен знать:

– первый и второй замечательные пределы;

– определение производной, ее геометрический смысл;

–таблицу производных;

– формулы производных суммы, произведения, частного;

– основные методы интегрирования;

– таблицу простейших интегралов;

– формулу Ньютона-Лейбница;

– определение частной производной;

– свойства определенного и неопределенного интегралов.

Студент должен уметь:

– вычислять производные функции при данном значении аргумента;

– исследовать функции с помощью производной и строить графики;

– интегрировать простейшие определенные интегралы;

– вычислять площади плоских фигур;

– находить частные производные различных порядков.

Тема 3.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого и второго порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Студент должен знать:

– типы задач, приводящие к дифференциальным уравнениям;

– определение дифференциального уравнения;

– определение общего и частного решений дифференциальных уравнений, их геометрической интерпретации;

– об интегральных кривых – решениях дифференциального уравнения;

– методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, дифференциальных уравнений первого порядка, дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Студент должен уметь:

– составлять дифференциальные уравнения на простейших задачах;

– решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными;

– решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка;

– решать однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Тема 3.3 Дифференциальные уравнения в частных производных

Дифференциальные уравнения в частных производных.

Студент должен знать:

– методы решения простейших дифференциальных уравнений с частными производными;

– методы решения дифференциальных уравнений первого порядка линейных относительно частных производных.

Студент должен уметь:

– решать простейшие дифференциальные уравнения в частных производных;

– решать дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных.

Тема 3.4 Ряды

Числовые ряды. Признак сходимости числового ряда по Даламберу.

Студент должен знать:

– определение числовых и функциональных рядов;

– необходимый и достаточный признаки сходимости рядов, признак Даламбера;

– признаки знакопеременных рядов, признак Лейбница;

– метод представления функций в степенные ряды с помощью Маклорена.

Студент должен уметь:

– определять сходимость числовых и функциональных рядов по признаку Даламбера;

– применять признак Лейбница для знакопеременных рядов;

– разлагать элементарные функции в ряд Маклорена.

Раздел 4 Основы теории вероятностей и математической статистики

Тема 4.1 Основы теории вероятностей и математической статистики

Определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Случайные величины, законы их распределения и числовые характеристики. Математическое ожидание и дисперсия.

Студент должен знать:

– определение числовых и функциональных рядов;

– теорему сложения вероятностей;

– теорему умножения вероятностей;

– определение математического ожидания, дисперсии дискретной случайной величины;

– среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Студент должен уметь:

– находить вероятность в простейших задачах, используя классическое определение вероятностей;

– решать задачи с применением теоремы сложения вероятностей для несовместных событий;

– находить математическое ожидание и дисперсию случайной величины по заданному закону ее распределения;

– находить среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Раздел 5 Основные численные методы

Тема 5.1 Численное интегрирование

Формулы численного интегрирования: прямоугольника и трапеций. Формула Симпсона.

Студент должен знать:

– определение числовых и функциональных рядов;

– способы представления функции в виде прямоугольников и трапеций;

– формулу Симпсона;

– выражения для определения абсолютных погрешностей.

Студент должен уметь:

– вычислять интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона.

Тема 5.2 Численное дифференцирование

Понятие о численном дифференцировании. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона.

Студент должен знать:

– интерполяционные формулы Ньютона;

– таблицу конечных разностей.

Студент должен уметь:

– по табличным данным находить аналитическое выражение производной.

Тема 5.3 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Понятие о численном решении дифференциальных уравнений. Метод Эйлера.

Студент должен знать:

– метод Эйлера для решения задачи Коши.

Студент должен уметь:

– находить значение функции, определяемое заданным дифференциальным уравнением и начальными условиями с использованием метода Эйлера.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие № 1

Тема: Комплексные числа и действия над ними

Цель: Научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах, решать квадратные уравнения при отрицательном дискриминанте

Оборудование: инструкционная карта, таблица квадратов

Определение комплексного числа

Числа вида $a+bi$, где a и b – *действительные числа*, i – *мнимая единица*, будем называть *комплексными*.

Число a будем назвать *действительной частью комплексного числа*, bi – *мнимой частью комплексного числа*, b – *коэффициентом при мнимой части*. Если $a=0$, то комплексное число bi называется *чисто мнимым*. Если $b=0$, то комплексное число $a+bi=a$ и называется *действительным*. Если $a=0$ и $b=0$ одновременно, то комплексное число $0+0i$ равно нулю. Итак, действительные числа и чисто мнимые числа представляют собой частные случаи комплексного числа.

Запись комплексного числа в виде $a+bi$ называется *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ считаются *равными* тогда и только тогда, когда в отдельности равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т.е. $a+bi=c+di$, если $a=c$ и $b=d$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1=2+3i$, $z_2=5–7i$. Найти:

а) z_1+z_2; б) $z_1–z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$.

Решение:

а) $z_1+z_2=(2+3i)+(5–7i)=2+3i+5–7i=(2+5)+(3i–7i)=7–4i$;

б) $z_1 – z_2 = (2+3i)–(5–7i) = 2+3i–5+7i = (2–5)+(3i+7i) = –3+10i$;

в) $z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(5–7i) = 10–17i+15i–21i^2 = 10–14i+15i+21 = (10+21)+(–14i+15i) = 31+i$.

При выполнении умножения можно использовать формулы сокращенного умножения.

Пример 2. Выполнить действия:

а) $(2+3i)^2$; б) $(3–5i)^2$; в) $(5+3i)^3$.

Решение:

а) $(2+3i)^2 = 4+2\cdot2\cdot3i+ 9i^2 = 4+12i–9 = –5+12i$;

б) $(3–5i)^2 = 9–2\cdot3\cdot5i+25i^2 = 9–30i–25 = –16–30i$;

в) $(5+3i)^3 = 125+3\cdot25\cdot3i+3\cdot5\cdot9i^2+27i^3$, *т.к.* $i^2=–1$, *а* $i^3=–i$, *то получим*

$(5+3i)^3 = 125+225i–135–(–27i) = –10+198i$.

Два комплексных числа называются *сопряженными*, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

Чтобы выполнить деление, производят дополнительное действие: умножают делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример 3. Выполнить деление:

$а)\ \dfrac{2+3i}{5-7i};\quad б)\ \dfrac{3+5i}{2+6i}.$

Решение:

а) $\dfrac{2+3i}{5-7i} = \dfrac{(2+3i)\cdot(5+7i)}{(5-7i)\cdot(5+7i)} = \dfrac{10+14i+15i+21i^2}{25-49i^2} = \dfrac{-11+29i}{74} = -\dfrac{11}{74}+\dfrac{29}{74}i;$

б) $\dfrac{3+5i}{2+6i} = \dfrac{(3+5i)\cdot(2-6i)}{(2+6i)\cdot(2-6i)} = \dfrac{6-18i+10i-30i^2}{4-36i^2} = \dfrac{36-8i}{40} = \dfrac{36}{40}-\dfrac{8}{40}i = \dfrac{9}{10}-\dfrac{1}{5}i.$

Геометрическая интерпретация комплексного числа

Комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить точкой Z плоскости с координатами $(a;b)$ (рис.1). Для этого выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат. Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют *действительной* (или *вещественной*) *осью*; чисто мнимые числа – точками оси ординат, которую будем называть *мнимой осью*.

Рисунок 1

Каждой точке плоскости с координатами *(a;b)* соответствует один и только один вектор с началом *O(0;0)* и концом *Z(a;b)*. Поэтому комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить в виде вектора с началом в точке *O(0;0)* и концом в точке *Z(a;b)*.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть комплексное число $z=a+bi$ изображено в виде вектора с началом в точке *O(0;0)* и концом *Z(a;b)* (рис.2).

Модулем комплексного числа $z=a+bi$ называется длина вектора, которую можно найти по формуле

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Обозначим модуль комплексного числа буквой r.

Аргументом комплексного числа называется угол φ, который образует вектор с положительным направлением оси абсцисс.

Рисунок 2

Величину угла φ можно найти с помощью формул:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r};\ \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений вида $\varphi+2\pi k$, где k – любое целое число. Таким образом, любое комплексное число z имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Если $k=0$, то получим главное значение аргумента φ, которое и будем называть аргументом комплексного числа.

Из соотношений и $\cos\varphi = \frac{a}{r};\ \sin\varphi = \frac{b}{r}$, следует $a=r\cdot cos\varphi$, $b=r\cdot sin\varphi$.

Если в запись комплексного числа z вместо a и b подставить эти значения, то получим

$$z=a+bi=rcos\varphi+irsin\varphi=r(cos\varphi+isin\varphi).$$

Таким образом, получили новую форму записи комплексного числа:

$$z=r(cos\varphi+isin\varphi),$$

которая называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа.

Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической:

1. Находят модуль комплексного числа r по формуле $r = \sqrt{a^2+b^2}$.
2. Для нахождения φ сначала определяют геометрически, в какой четверти находится точка Z.
3. Находят угол φ:

а) если точка Z находится в 1-ой координатной четверти, то аргумент нужно находить по формуле $\varphi = arctg\left|\frac{b}{a}\right|$;

б) если точка Z находится во 2-ой координатной четверти, то аргумент нужно находить по формуле $\varphi = \pi - arctg\left|\frac{b}{a}\right|$;

в) если точка Z находится в 3-ей координатной четверти, то аргумент нужно находить по формуле $\varphi = \pi + arctg\left|\frac{b}{a}\right|$;

г) если точка Z находится в 4-ой координатной четверти, то аргумент нужно находить по формуле $\varphi = 2\pi - arctg\left|\frac{b}{a}\right|$.

4. Записывают комплексное число z в тригонометрической форме.

Пример 4. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z=1+i$.

Решении:.

1) Т.к. a=1, b=1, то $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

2) Очевидно, что числу z соответствует точка Z, лежащая в I четверти.

3) Точка Z находится в 1-ой координатной четверти, поэтому аргумент находим по формуле $\varphi = arctg\left|\frac{b}{a}\right| = arctg\left|\frac{1}{1}\right| = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

4) тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos 45^0 + i\sin 45^0\right).$$

Показательная форма комплексного числа

Если комплексному числу $z=(cos\varphi+isin\varphi)$, модуль которого равен 1, поставить в соответствие показательное выражение $e^{i\varphi}$, то получим соотношение:

$$cos\varphi+isin\varphi=e^{i\varphi},$$

которое называется *формулой Эйлера*.

Любое комплексное число z можно записать в виде $z=re^{i\varphi}$.

Эта форма записи комплексного числа называется *показательной формой*.

Пример 5. Записать число $z = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ в показательной форме.

Решение:

Здесь $r = 3, \varphi = \dfrac{3\pi}{2}$. Следовательно, показательная форма числа имеет вид:

$$z = 3e^{\frac{3\pi}{2}i}.$$

Операции над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть имеются два комплексных числа $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

Умножение: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$, т.е. при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы – складываются.

Деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$, т.е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы – вычитаются.

Возведение в степень: пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, тогда $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, т.е. при возведении в степень модуль возводится в эту степень, а аргумент – умножается на нее.

Извлечение корня: пусть снова $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, тогда $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\varphi}{n}+\dfrac{2\pi k}{n}\right)\right]$, с $k = \overline{0, n-1}$. Таким образом, корень n-й степени из комплексного числа имеет ровно n различных значений.

Пример 6. Даны комплексные числа $z_1=3(\cos 330°+i\sin 330°)$ и $z_2=2(\cos 60°+i\sin 60°)$.

Найти:

а) $z_1 \cdot z_2$; б) z_1/z_2; в) z_2^4; г) $\sqrt[3]{z}$.

Решение:

а)
$z_1 \cdot z_2=[3(\cos 330°+i\sin 330°)]\cdot[2(\cos 60°+i\sin 60°)]=3\cdot 2[(\cos(330°+60°)+i\sin(330°+60°)]=6(\cos 390°+$

$i\sin 390°)=6(\cos 30°+i\sin 30°)$;

б)
$\dfrac{z_1}{z_2} = \left[3(\cos 330° + i\sin 330°)\right] : \left[2(\cos 60° + i\sin 60°)\right] = 1{,}5\left[(\cos(330°-60°) + i\sin(330°-60°)\right] =$
$= 1{,}5(\cos 270° + i\sin 270°)$;

в) $z_2^4 = [2(\cos 60° + i\sin 60°)]^4 = 2^4\left[\cos(60°\cdot 4) + i\sin(60°\cdot 4)\right] = 16(\cos 240° + i\sin 240°)$;

г) $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\dfrac{330^0+360^0 k}{3} + i\sin\dfrac{330^0+360^0 k}{3}\right)$, где k принимает значения 0, 1 и 2.

Если $k=0$, то $z^{(1)}= \sqrt[3]{z}\,(\cos110°+i\sin110°)$;

если $k=1$, то $z^{(2)}= \sqrt[3]{z}\,(\cos230°+i\sin230°)$;

если $k=2$, то $z^{(3)}= \sqrt[3]{z}\,(\cos350°+i\sin350°)$.

Порядок выполнения заданий:

1. Для заданных комплексных чисел z_1, z_2, z_3 и z_4:
   а) изобразить их геометрически;
   б) выполнить действия: z_1+z_3, z_1-z_3, $z_1\cdot z_4$, $\frac{z_1}{z_4}$;
   в) записать числа в тригонометрической форме;
   г) вычислить z_3^6, $\sqrt[5]{z_4}$.
2. Решить квадратное уравнение.
3. Ответить на контрольные вопросы.
4. Вывод.

Контрольные вопросы:

1. Какие комплексные числа называются сопряженными?
2. Как геометрически интерпретируются комплексные числа?
3. Что называется модулем комплексного числа? Что называется аргументом комплексного числа?
4. Какие формы записи комплексных чисел Вы знаете?
5. Запишите формулу Муавра и формулу Эйлера.

Литература:

1. Богомолов Н.В. Математика: Учебник для ссузов.– М.: Дрофа, 2011.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для ссузов.– М.: Дрофа, 2011.
3. Дадаян А.А. Математика: Учебник.– М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2003.
4. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Яковлев Г.Н. Математика: Учебное пособие: В 2 кн. Кн. 1.– М.: ООО «Издательство Новая Волна»: Издатель Умеренков, 2004.

Вариант	**Задание 1**				**Задание 2**
	Z1	**Z2**	**Z3**	**Z4**	
1	$2+3i$	3	$2i$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$	$x^2-4x+5=0$
2	$-2i$	$4+2i$	5	$1-i$	$x^2+2x+10=0$
3	1	$3-2i$	$-i$	$-\sqrt{3}-i$	$x^2+3x+3=0$
4	$-1-2i$	i	-1	$1-\sqrt{3}i$	$x^2+2x+3=0$
5	-2	$3+i$	$-2i$	$\sqrt{3}-i$	$x^2+4x+8=0$
6	$-4+4i$	$2i$	$-\frac{1}{2}$	$-1-i$	$x^2+3x+4=0$
7	$0,5$	$-3+2i$	$-\frac{1}{3}i$	$\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i$	$x^2+4x+13=0$
8	$3+2i$	$-\frac{i}{2}$	$-4+4i$	$-4i$	$x^2-x+3=0$

9	-3	$-1+i$	i	$1+\sqrt{3}i$	$x^2-2x+2=0$
10	$2i$	$-2-i$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}+i$	$x^2-x+2=0$

Практическое занятие 2.

Тема: Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка и задач, приводящих к дифференциальным уравнениям первого порядка.

Цель: Научиться решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка и задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям первого порядка.

Оборудование: таблица производных, таблица интегралов, инструкции к работе.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнения вида:

$$y'+py=q,$$

где p и q – функции переменной x или постоянные величины, называется линейными дифференциальными уравнениями первого порядка.

Линейное уравнение может быть и уравнением с разделяющимися переменными. В этом случае оно решается как уравнение с разделяющимися переменными.

К уравнениям с разделяющимися переменными относятся линейные уравнения первого порядка без правой части, т.е. при $q=0$.

Чтобы решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка с правой частью ($q\neq0$), нужно свести его к уравнению с разделяющимися переменными.

При решении таких уравнений используется метод Бернулли. Для этого используют подстановку $y=uv$, в результате которой уравнение $y'+py=q$ сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными: $u'+pu=0$; $uv'=q$, где u и v – новые функции переменной x. Одну из функций подбирают так, чтобы уравнение, содержащее другую функцию, стало уравнением с разделяющимися переменными.

Алгоритм решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

1. Приводят уравнение к виду $y'+py=q$.
2. Использую подстановку $y=uv$, находят $y'=u'v+uv'$ и подставляют эти выражения в уравнение.
3. Группируют члены уравнения, выносят одну из функций u или v за скобки. Находят вторую функцию, приравняв выражение в скобках к нулю и, решив полученное уравнение.
4. Подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.
5. Записывают общее решение, подставив выражения для найденных функций u и v в равенство $y=uv$.
6. Если требуется найти частное решение, то определяют C из начальных условий

и подставляют в общее решение.

Пример 1. Решить уравнение $y' - \frac{3}{x} y = x$.

Решение. Это линейное уравнение, т.к. оно имеет вид $y'+py=q$, где $p = -\frac{3}{x}$, $q=x$. Положим $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставив выражения y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' - \frac{3}{x} uv = x,$$

или

$$u\left(v' - \frac{3}{x} v\right) + u'v = x \qquad (1).$$

Считая, что неизвестная функция y является произведением двух (также неизвестных) функций uи v, мы тем самым можем одну из этих функций выбрать произвольно. Поэтому приравняем к нулю коэффициенты при u в последнем уравнении:

$$v' - \frac{3}{x} v = 0 .$$

Разделяя переменные в полученном уравнении, имеем

$$\frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dv}{v} = 3\int \frac{dx}{x}; \quad \ln v = 3\ln x; \quad \ln v = \ln x^3; \quad v = x^3 .$$

Снова ввиду произвольности выбора v мы можем не учитывать произвольную постоянную C (точнее – можем приравнять ее нулю).

Найденное значение v подставляем в уравнение (1):

$u'x^3 = x;$ $\quad u' = \frac{1}{x^2};$ $\quad du = \frac{1}{x^2} dx;$ $\quad \int du = \int \frac{dx}{x^2};$ $\quad u = -\frac{1}{x} + C$ (здесь C писать обязательно, иначе получится не общее, а частное решение).

Тогда окончательно получим $y = uv = \left(C - \frac{1}{x}\right) x^3$.

Замечание. Уравнение (1) можно было записать в эквивалентном виде:

$$v\left(u' - \frac{3}{x} u\right) + uv' = x .$$

Произвольно выбирая функцию u(а не v), мы могли помогать $u' - \frac{3}{x} u = 0$ и т.д. Этот путь решения отличается от предыдущего одной лишь заменой v на u (и, следовательно, u на v), так что окончательное значение y оказывается тем же самым.

Иногда уравнение становится линейным, если y считать независимой переменной, а x

– зависимой, т.е. поменять роли x и y. Это можно сделать при условии, что x и dx входят в уравнение линейно.

Алгоритм рения задач на составление дифференциальных уравнений:

1. Из переменных величин выделяют функцию и аргумент, устанавливают физический смысл функции и ее производной. Затем, используя известные сведения из физики, механики, электротехники и других дисциплин, выражают зависимость между функцией, ее производной и аргументом, т.е. составляют дифференциальное уравнение.
2. Определяют, к какому типу относится составленное уравнение и находят его общее решение.
3. Если в задаче даны начальные условия, то получают частное решение уравнения.

Пример 2. Материальная точка движется так, что скорость ее движения пропорциональна пройденному пути. В начальный момент точка находилась от начала отсчета на расстоянии *1 м*, а через *2 с* – на расстоянии *е м*. Найти закон движения материальной точки.

Решение. Обозначим скорость движения материальной точки через v. Как известно, скорость равна производной пути по времени, т.е. $v=\frac{dS}{dt}$. По условию, скорость пропорциональна пройденному пути, т.е. $v=\frac{dS}{dt}=kS$, где k – коэффициент пропорциональности.

Таким образом, дифференциальное уравнение данной задачи имеет вид $\frac{dS}{dt}=kS$. Разделив в нем переменные, получим $dS=kSdt$; $\frac{dS}{S}=kdt$. Общее решение этого уравнения есть $\ln S=kt+C$.

Найдем частное решение, т.е. из всех возможных движений по этому закону найдем такое, при котором точка в начальный момент удалена на *1 м* от начала отсчета. Вообще говоря, расстояние материальной токи от начала отсчета в начальный момент могло быть взято любым, а не обязательно равным *1 м*. Этот выбор аналогичен выбору одной кривой из семейства кривых в геометрических задачах.

Используя для определения C начальные условия $t=0$, $S=1$, имеем $\ln 1=k\cdot 0+C$, откуда C=0. Тогда закон движения можно записать в виде $\ln S=kt$.

Остается еще неизвестной величина k. Ее можно определить из того условия, что через *2 с* точка находилась на расстоянии у (*е* – основание натуральных логарифмов). Следовательно, $\ln e = k \cdot 2$ или $2k = 1$, откуда $k = \frac{1}{2}$.

Итак, закон движения материальной точки имеет вид $\ln S = \frac{t}{2}$, т.е. $S = e^{\frac{t}{2}}$.

Порядок выполнения заданий:

1. Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Решить задачу Коши для линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
3. Решить задачу, приводящую к дифференциальному уравнению.
4. Ответить на контрольные вопросы.
5. Вывод.

Контрольные вопросы:

1. Каков общий вид линейных дифференциальных уравнений первого порядка? Как для них формулируется задача Коши?
2. Как решаются линейные дифференциальные уравнения первого порядка?
3. С помощью какой подстановки решается линейное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?

Вариант	Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка		Найти частное решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка		Решить задачу
	а	б	а	б	
1	$y'+\frac{2y}{x}=x^2$ $(x\neq0)$	$y'-\frac{xy}{1+x^2}=0$	$y'-\frac{2}{x}y=x^4$, если $y=\frac{4}{3}$ при $x=1$	$y'-2y=1$, если $y=\frac{1}{2}$ при $x=0$	Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна их количеству в рассматриваемый момент времени t. Количество бактерий увеличилось в четыре раза в течение 2,5 ч. Найти зависимость количества бактерий от времени.
2	$y'-y\,ctgx=\sin x$	$y'+y=x+1$	$y'-y\,tgx=\frac{1}{\cos^2 x}$, если $y=0$ при $x=0$	$2y'-y=e^x$, если $y=2$ при $x=0$	Температура воздуха равна 20 ^{0}С. Известно, что за 20 мин тело охлаждается от 75 до 50 ^{0}С. Какова будет температура через 2 часа после первоначально измерения?

3	cosxdy+ysinxdx=0	(1+x^2)y′-xy=2x	xy'+y=x^2 (x≠0), если y=2 при x=1	$y'-\frac{3}{x}y=x$, если y=1 при x=1	Скорость распада некоторого радиоактивного вещества пропорциональна его количеству в данный момент времени. Найти закон радиоактивного распада, если известно, что через 1100 лет останется половина первоначального количества радиоактивного вещества.
4	$y'-\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2}$	$\frac{dy}{dx}$ cosx+ysinx=1	y'-2y+3e^{2x}=0, если y=1 при x=0	$x'-\frac{3}{t}=t^3e^{t-1}$, если y=-2 при x=1	Найти уравнение линии проходящей через точку (2; 0) и имеющую касательную, угловой коэффициент которой равен x^2.
5	y′+ytgx=$\cos^2$x	xy′-2y=0	y'-ytgx= $\frac{1}{\cos x}$, если y=0 при x=0	$\frac{dy}{dx}-2xy=e^{x^2}$, если y=0 при x=2	Тело движется прямолинейно со скоростью, пропорциональной времени движения. Найти уравнение движения тела, если от начала отсчета времени оно проходит 4,5 м за 3 с, а 10 м – за 6 с. Какой путь пройдет тело за 8 с?
6	$y'-\frac{2}{x}y=x^4$	y′-ytgx= $\frac{1}{\cos x}$	xy'-y=x^3, если y= $\frac{1}{2}$ при x=1	x(y'-xcosx)=y, если y= $\frac{\pi}{2}$ при x= $\frac{\pi}{2}$	В начальный момент времени t=0 имелось 20 бактерий, а в течение 3 ч их число утроилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 5 ч?
7	y′-yctgx=2xsinx	$y'-\frac{y}{x}=x$	y'+2ytgx=$\cos^4$x, если y=-1 при x=0	xy'+y=sinx, если y= $\frac{1}{\pi}$ при x= $\frac{\pi}{2}$	Температура воздуха равна 10 ^{0}С. Тело охлаждается за 20 мин от 60 до 20 ^{0}С. Какую температуру будет иметь тело через 15 мин после первоначального измерения?
8	$\frac{dy}{dx}+2y=e^x$	y′cosx+ysinx=1	x^2y'+2yx=sinx, если y=0 при x=π	x^2y'+2xy=-4, если y=0 при x=-1	Период полураспада некоторого радиоактивного вещества равен 900 лет. Какое количество этого вещества останется через 600 лет?
9	x^2y′+2xy=-4	(x+1)y′+y=cosx	xy'+y-2x=0, если y=2 при x=-1	$y'-\frac{y}{x}=x^2$, если y= $\frac{1}{2}$ при x=1	Найти уравнение линии, проходящей через точку М (3; 4) и такой, что ее угловой коэффициент касательной равен отношению абсциссы к ординате.
10	x′-3x=e^{-t}	$y'-\frac{2}{x}y=2x^4$	xy'-4yx=x, если y= $\frac{1}{2}$ при x=0	$y'-2xy=e^{x^2}$, если y=0 при x=2	Тело движется прямолинейно со скоростью, пропорциональной времени движения. Найти уравнение движения тела, если от начала отсчета времени оно проходит 15 м за 3 с, а 20 м – за 15 с. Какой путь пройдет тело за 40 с?

ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Задание на контрольную работу составлено в 10 вариантах. Номер варианта определяется последней цифрой шифра студента по таблице вариантов (табл. № 1). Контрольная работа состоит из 6-ти заданий.

Вариант	Номера задач
0	4, 16, 21, 35, 43, 60
1	2, 15, 29, 36, 44, 53
2	3, 14, 28, 37, 41, 56
3	1, 12, 24, 39, 45, 57
4	10, 13, 22, 31, 46, 58
5	9, 11, 23, 32, 47, 54
6	8, 19, 25, 40, 48, 51
7	5, 18, 26, 33, 42, 59
8	7, 17, 30, 34, 49, 52
9	6, 20, 27. 38, 50, 55

Контрольная работа

Задания 1-10.

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$
2. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x+1}{5x^2+2x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2-2x-8}{2x^2+5x\mp 2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}$
8. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$
9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$
10. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{8-x^3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x^3+5x-1}$

11. Найдите производную функции f(x) = $\frac{2}{(3x^2-5)^3}$ и вычислите f '(-1)

12. Найдите производную функции v = $\ln \mathrm{t}g\, \varphi - \frac{1}{2\sin^2 \varphi}$и вычислите v'($\frac{\pi}{4}$)

13. Найдите производную функции y = $e^{\sin^2 2x}$ и вычислите y'($\frac{\pi}{8}$)

14. Найдите производную функции S = $\frac{1}{\sqrt{x^2+6}}$и вычислите S'(2)

15. Найдите производную функции f (x) = xe^{x^2}и вычислите f' (0)

16. Найдите производную функции y =x$\sqrt{1+X^2}$и вычислите y' ($\sqrt{3}$)

17. Найдите производную функции f(x) = x$\ln x - x$и вычислите f '(e^x)

18. Найдите производную функции S = $\frac{t}{e^t}$и вычислите S' (0)

19. Найдите производную функции y = $\mathrm{tg}^2\, x - \cos^2 x$ и вычислитеy' ($\frac{\pi}{4}$)

20. Найдите производную функции y = $\frac{3x}{2-x}$и вычислите y' (3)

Задания 21-30. Найдите интегралы.

21. а) $\int (2 - 3e^x + x)dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

22. а) $\int (3x^5 - \cos x - 1)dx$; б) $\int \frac{x^{-\frac{1}{2}}+2}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int \cos 3x dx$

23. а) $\int (7x^5 + \sin x + 3)dx$; б) $\int \frac{5-\sqrt[3]{x^2}}{x}dx$; в) $\int \sqrt[3]{(3x^2-1)^2}\, x dx$

24. а) $\int \left(7 - \frac{1}{2\cos^2 x} - x^2\right)dx$; б) $\int \frac{x^{-\frac{1}{3}}-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; в) $\int \sin(\frac{\pi}{7} - x)dx$

25. а) $\int \left(x^4 - \frac{1}{2x} - 4\right)dx$; б) $\int \frac{3+x}{\sqrt[3]{x}}dx$; в) $\int \frac{\cos x dx}{4+3\sin x}$

26. а) $\int \left(2 - \frac{1}{3\sin^2 x} + 2x\right)dx$; б) $\int \frac{x^{-\frac{2}{3}}-1}{\sqrt[3]{x}}dx$; в) $\int \frac{x dx}{x^2+1}$

27. а) $\int \left(3x^2 - \frac{2}{1+x^2} - 5\right)dx$; б) $\int \frac{5+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; в) $\int \tan x dx$

28. а) $\int \left(x - \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}} + 2\right)dx$; б) $\int \frac{x^{-\frac{1}{4}}-2}{\sqrt[4]{x^2}}dx$; в) $\int x2^{x^2}dx$

29. а) $\int(2\cos x - 5x^4 + 3)dx$; б) $\int \frac{4+X}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{Xdx}{(x^2+5)^4}$

30. а) $\int(5e^x - x^3 - 4)dx$; б) $\int \frac{x^{-\frac{3}{4}}-5}{\sqrt[4]{x}}dx$; в) $\int \sqrt[5]{(2x^3-4)^3}\,x^2dx$

Задания 31-40. Сделать чертёж и вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

31. $y = 8x – x^2 – 7$ и осью Ox

32. $y = x^3 – 1$, $y = 0$, $x = 0$

33. $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$

34. $y = 8x – x^2 + 9$ и осью Ox

35. $y = x^3$, $y = x^2$, $x = -1$, $x = 0$

36. $y = x^2 – 6x + 8$ и осью Ox

37. $y = x^2$ и $y = x + 2$

38. $y = x^2 – 4x – 5$ и осью Ox

39. $y = 6x – 3x^2$ и осью Ox

40. $y = x^2 + 2$ и $y = 2x + 2$

Задания 41-50. Задан закон распределения дискретной случайной величины. Вычислить: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3)среднеквадратическое отклонение.

41.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
P	0,1	0,1	0,1	0,3	0,1	0,1	0,2

42.

X	-1	1	2	3	4	5	6
P	0,4	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

43.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4	0,1	0,1

44.

X	1	2	3	4	5	6	7
P	0,3	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1

45.

X	2	4	6	8	10	12	14
P	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3	0,1

46.

X	-4	-2	0	2	4	6	8
P	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,3

47.

X	1	3	5	7	9	11	13
P	0,3	0,1	0,1	0,3	0,1	0,1	0,2

48.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
P	0,15	0,1	0,1	0,15	0,1	0,1	0,4

49.

X	-2	0	2	4	6	8	10
P	0,3	0,1	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1

50.

X	1	2	3	4	5	6	7
P	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1

51. Шеститомное собрание сочинений Н.В. Гоголя поместили на полку в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят в порядке возрастания номеров?

52. Из урны, содержащей 8 шаров, помеченных цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, вынимают наугад все шары один за другим. Найти вероятность того, что номера извлечённых шаров будут идти в порядке возрастания.

53. Карточка «Спортлото» содержит 36 чисел. В тираже участвуют 5 чисел. Какова вероятность того, что верно будет угадано 5 чисел?

54. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет нечётное число очков? Что выпадет «шестёрка»?

55. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «крыша». Ребёнок рассыпал буквы и собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово «крыша».

56. Имеется 100 деталей, из которых возможны 4 % бракованных. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь – бракованная?

57. В урне 7 красных и 6 синих шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найдите вероятность того, что они разного цвета.

58. Экзаменационные билеты пронумерованы от 1 до 35. Какова вероятность того, что наудачу взятый билет имеет номер, кратный пяти?

59. Из семи одинаковых карточек разрезной азбуки «а», «к», «н», «о», «с», «у», «ф» наудачу выбирают 5 карточек и складывают их в ряд в порядке извлечения. Какова вероятность получить при этом слово «конус»?

60. Из числа шаров, занумерованных всеми двузначными числами, наудачу берётся один. Какова вероятность того, что номер взятого шара оканчивается нулём?

Критерии оценки выполнения домашней контрольной работы

Отметка **«зачтено»** выставляется при условии:

- работа выполнена в полном объеме, в соответствии с заданием;
- задачи решены верно, ход решения пояснен;
- графические задания выполнены аккуратно. Работа аккуратно оформлена, приведен список использованной литературы.

Работа может быть зачтена, если она содержит единичные несущественные ошибки:

- отсутствие выводов в решении задач;
- арифметические ошибки, в решении задач, не приводящие к абсурдному результату и т. п.;
- при отсутствии списка используемой литературы или несоответствии его оформления стандарту.

Отметка **«не зачтено»** выставляется при условии:

Работа выполнена не в полном объеме или содержит следующие существенные ошибки:
- отдельные задания в работе освещены не в соответствии с вариантом задания;
- неправильно употребляются научная терминология и единицы измерения;
- для решения задач неправильно выбрана формула, допущены грубые ошибки в расчетах;
- схемы, графические задания выполнены не в полном объеме.

Контрольная работа, выполненная неразборчивым почерком, а также не по заданному варианту, возвращается учащемуся без проверки, с указанием причин возврата.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению задач контрольной работы

Функции и пределы.

Повторите понятие функций, области определения и области значений функции. Разберите все способы задания функции, особенно аналитический и графический.

Определение: Число А называется пределом функции $y=f(x)$ при x стремящемся к a, если для любой последовательности чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ сходящейся к a, следует, что последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)\ldots$ сходится к к числу А.

При вычислении пределов используют следующие теоремы:

Теорема 1. Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще определенного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

Теорема 2. Предел произведения двух, трех и вообще конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x)=c\lim_{x\to a} f(x).$$

Следствие 2. Предел степени равен степени предела:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n.$$

Теорема 3. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от нуля, т.е.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},$$

если

$$\lim_{x\to a} g(x)\neq 0.$$

<u>Примеры</u>**.**

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x+5}{4x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to1}(4x-2)}=\frac{3\lim\limits_{x\to1}x+5}{4\lim\limits_{x\to1}x-2}=\frac{3\cdot1+5}{4\cdot1-2}=\frac{8}{2}=4$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3}=\frac{2}{3}$

Для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на *x* в старшей степени.

Используются также следующие пределы:

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю.

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e=2{,}71828$$

Производная и ее приложения

Определение. **Производной функции** *y=f(x)* по аргументу *x* называется предел отношения ее приращения *Δf(x)* к приращению *Δx* аргумента x, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f^{/}(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Если этот предел конечный, то функция *y=f(x)* называется **дифференцируемой** в точке x. Если же этот предел есть ∞, то говорят, что функция *y=f(x)* имеет в точке x бесконечную производную.

Механический смысл производной: скорость есть первая производная пути по времени, т.е. $v=S^{/}(t)$.

Геометрический смысл производной: тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=f(x)$ равен первой производной этой функции, вычисленной в точке касания, т.е. $tg\alpha = f^{/}(x)$

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0:

$$y = f(x)+f^{/}(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Уравнение нормали к графику функции: $y = f(x)+\frac{1}{f^{/}(x_0)}\cdot(x-x_0)$

Таблица производных

$(c)' = 0$	$\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}$
$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\left(\log_a\lvert x\rvert\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(U\cdot V)' = U'V+UV'$
$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V-UV'}{V^2}$
$\left(a^x\right)' = a^x\ln a$	$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$; $\dfrac{1}{x^a} = x^{-a}$

Процесс нахождения производных называется дифференцированием функции.

Дифференцирование сложной функции

Пусть $y=y(u)$, где $u=u(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $y=y[u(x)]$ есть также дифференцируемая функция.

Производные высших порядков

Определение. **Производная второго порядка** (вторая производная) от функции *y=f(x)* есть производная от ее первой производной: $y^{//} = \left[f^{/}(x)\right]^{/}$.

Определение: Производная третьего порядка (третья производная) от функции *y=f(x)* есть производная от ее второй производной: $y^{///} = \left[f^{//}(x)\right]^{/}$

Пример. Продифференцировать функцию $y = arcsin^5(cos\ (2 - 4x))$

Решение: находим производную данной функции по правилам дифференцирования сложной функции:

$$y^{/} = 5arcsin^4(\cos(2-4x)) \cdot \left(arcsin(\cos(2-4x))\right)^{/} =$$

$$= 5arcsin^4(\cos(2-4x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - cos^2(2-4x)}} \cdot (\cos(2-4x))^{/} =$$

$$= \frac{5arcsin^4(\cos(2-4x))}{\sin(2-4x)} \cdot (-\sin(2-4x)) \cdot (-4) =$$

$$= 20arcsin^4(\cos(2-4x))$$

Интеграл и его приложения

Функция $F(x)$, определённая в промежутке $[a;b]$ называется ***<u>первообразной</u>*** данной функции $f(x')$, если для $x \in [a;b]$ выполнено равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Для заданной функции $f(x)$ её первообразная определяется неоднозначно. Доказано, что если $F'(x)$ – первообразная, для $f(x)$, то выражение $F(x)+c$, где c – произвольное число, задаёт все возможные первообразные для функции $f(x)$.

Любая <u>непрерывная</u> на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$. <u>Неопределённым интегралом</u> от данной функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (F'(x) = f(x)),$$

где $\int$ – знак неопределённого интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ _ подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Нахождение для функции $f(x)$ всех её первообразных называется её интегрированием. Интегрирование – действие обратное дифференцированию.

Свойства неопределённого интеграла (НИ)

Из определения НИ непосредственно вытекают его свойства:

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:
$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$
2. Дифференциал НИ равен подынтегральному выражению:
$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;
4. $\int \left(f_1(x)\, f_2(x)\right)o/x = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;
5. $\int dF(x) = F(x) + c$.

Таблица интегралов

1. $\int dx = x + c_1$;
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c\left(n \neq -1\right)$;
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$;
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, \quad (a > 0, a \neq 1); \int e^x dx = e^x + c$;
5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$;
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$;
7. $\int \cos x dx = -\sin x + c$;
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;
9. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + c, \; a \neq 0$;
10. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} - \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a} + c\right|$;
11. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} - \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$;
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$.

Справедливость этих формул проверяется дифференцированием.

Вычисление определённого интеграла

а) Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема. Если *f*(*x*) – непрерывна на $[a,b]$ то

$$(1) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - любая первообразная для функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Пример 1. Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1) tgx dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx d(tgx) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx dx = \left.\left(\frac{tg^2 x}{2} + \ln|\cos x|\right)\right|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0 + \ln 1) = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

б) Замена переменной в определённом интеграле.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[c;d]$ и $\varphi(c) = a,\ \varphi(d) = b,\ a \le \varphi(t) \le b$, то

$$(2) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- формула замены переменной в определённом интеграле.

Пример 2. Вычислить определенный интеграл.

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{ll} 2x + 1 = t^2 & x = 0,\ t^2 = 1,\ t = 1 \\ x = \frac{1}{2}(t^2 - 1) & x = 4,\ t^2 = 9,\ t = 3 \\ dx = tdt & \end{array} \right| = \int_1^3 \frac{tdt}{+t} =$$

$$= \int_1^3 \frac{(t+1) - 1}{1 + t} dt = \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left(t - \ln(t+1) \Big|_1^3\right) =$$

$$= (3 - \ln 4) - (1 - \ln 2) = 2 - \ln 2$$

в) Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a;b]$ то $(3)\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$ - формула интегрирования по частям в определённом интеграле.

Пример 3.

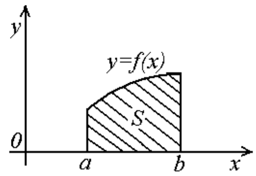
$$\int_0^1 x arctgx dx = \begin{vmatrix} u = arctgx, & dv = xdx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} arctgx\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \left(\frac{x^2 arctgx}{2} - \frac{x}{2} + \frac{arctgx}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Приложение определённого интеграла

а) Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь криволинейной трапеции, ограничена прямыми $x = a$, $x = b$, $(a<b)$, осью ox и непрерывной кривой $y = f(x), (y > 0)$.



Вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

Пример 4.Найти площадь области, ограниченной линиями

$xy = 4$; $x+y=5$

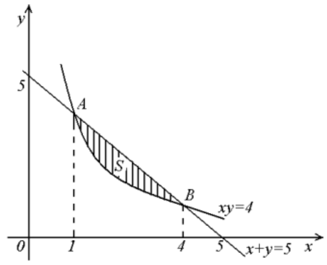


Рис. 1

Решение: Построим область S (рис.4) и найдём абсциссы точек пересечения A, B:

$$\begin{cases} xy = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$y = 5 - x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 4, \quad \text{тогда } S = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right)dx =$$

$$= \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right)\Bigg|_1^4 = 7\frac{1}{2} - 8\ln 2 \text{ ед}^2.$$

Основы теории вероятностей и математической статистики

К числу основных понятий теории вероятностей относятся: событие, вероятность события и относительная частота появления события при испытаниях.

Суммой A + B **двух событий** A и B называется событие, состоящее в появлении события A или события B, или обоих этих событий.

Суммой нескольких событий называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий A и B называется событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу всех элементарных исходов испытания, если все исходы равновозможны (**классическое определение вероятности**). Формулой это определяется так:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятных событию A; n – число всех возможных элементарных исходов.

Из определения вероятности вытекают следующие свойства:

а) вероятность достоверного события равна единице;

б) вероятность невозможного события равна нулю;

в)вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей;

г) вероятность суммы двух **несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

<u>Произведение событий</u>

Условной вероятностью $P(B \mid A)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже произошло.

Теорема. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B \mid A) = P(B)\cdot P(A \mid B).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A1A2A3...An) = P(A1)\cdot P(A2 \mid A1)\cdot P(A3 \mid A1A2)\cdot ...\cdot P(An \mid A1A2...An\text{-}1).$$

Два события A и B называются **независимыми**, если

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

Пример. В первом ящике 2 белых и 10 чёрных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 чёрных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

Решение. В данном случае речь идёт о совмещении событий A и B, где событие A – появление белого шара из первого ящика, событие B – появление белого шара из второго ящика. При этом A и B – независимые события. Имеем P(A) = 2/12 = 1/6, P(B) = 8/12 = 2/3. Применив теорему умножения вероятностей, находим

P (AB) = P (A) ·P (B) = (1/6) · (2/3) =1/9.

Сумма событий

Теорема. Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

P(A1 + A2 + ... + An) = P(A1) + P(A2) + ... + P(An).

Теорема. Сумма вероятностей событий A1, A2,..., An, образующих полную группу, равна единице:

P(A1) + P(A2) +...+ P(An) = 1.

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

P(A) + P(A) = 1.

Теорема. Вероятность суммы совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB).

Пример. В урне 10 белых, 15 чёрных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: белый; чёрный; синий; красный; белый или чёрный; синий или красный; белый, чёрный или синий.

Решение. Имеем n=10 +15+ 20 +25= 70, P (Б) = 10/70= 1/7, P (Ч) = 15/70= 3/14,
P(С) = 20/70 =2/7, P (К) = 25/70= 5/14.
Применив теорему сложения вероятностей, получим
P(Б+Ч) = P(Б) + P (Ч) = 1/7+ 3/14= 5/14,
P(С+К) =P(С) + P(К) = 2/7+ 5/14 = 9/14,
P(Б+Ч+С) = 1− P(К) = 1− 5/14 =9/14.

Формула полной вероятности

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий B1, B2,..., Bn, образующих полную группу и называемых гипотезами, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

P(A) = P(B1) P(A | B1) + P(B2) P(A | B2) +...+ P(Bn) P(A | Bn).

Пример. Студент знает только 10 из 25 экзаменационных билетов. В каком случае вероятность сдать экзамен больше: когда студент подходит тянуть билет первым или вторым по счету?

Решение. Обозначим события: A – вытягивает выученный билет, подходя первым; B – вытягивает выученный билет, подходя вторым.

P(A) = 10/25 = 0,4 (число благоприятствующих исходов равно числу выученных билетов; число всех элементарных исходов равно числу билетов).

Событие B может наступить при появлении одного из двух несовместных событий C1 (первый взятый билет был известен нашему студенту) и C2 (первый взятый билет был невыученный). По формуле полной вероятности

P(B) = P(C1) ·P(B | C1) + P(C2) ·P(B | C2);

P(B) = $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} + \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} = \frac{240}{600}$ = 0,4.

Так как P(A) = P(B) = 0,4, то вероятность одинакова.

Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий B1, B2,..., Bn, образующих полную группу. Тогда условная вероятность любого события Bi (i = 1, 2, ..., n) при условии, что событие A уже произошло, вычисляется по **формуле Байеса**:

$$P(Bi| A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_{n1})}$$

Пример. В первой урне 4 белых и 6 чёрных шаров, во второй – 5 белых и 4 чёрных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар, после чего из второй урны извлекают один шар. Найти вероятность, что этот шар белый. Какова вероятность, что из первой во вторую урну был переложен чёрный шар, если извлечённый из второй урны шар оказался белым?

Решение. Пусть А – событие, состоящее в том, что извлечённый шар из второй урны оказался белым, В1 – из первой урны во вторую переложили белый шар, В2 – чёрный. В1 и В2 – гипотезы.

$$P(B_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad P(B_2) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}\,.$$

Найдём $P(A|B_1)$ и $P(A|B_2)$.

Если переложили белый шар, то во второй урне стало 10 шаров, из них 6 белых, $P(A|B_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, если чёрный, то шаров также 10, но белых 5, тогда $P(A|B_2) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

По формуле полной вероятности

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{50}$

По формуле Байеса:

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{27}{50}} = \frac{5}{9}$$

Схема Бернулли

Испытания называются **независимыми относительно события А**, если при нескольких испытаниях вероятность события А не зависит от исходов других испытаний.

Говорят, что испытания проводятся по схеме Бернулли, если для них выполняются следующие условия:

1) испытания независимы;

2) количество испытаний известно заранее;

3) в результате испытания может произойти только два исхода: «успех» или «неуспех»;

4) вероятность «успеха» в каждом испытании одна и та же.

Вероятность того, что при n испытаниях «успех» осуществится ровно k раз и, следовательно, «неуспех» (n – k) раз, вычисляется по следующей формуле:

$P_n(k) = C_n^k p^k g^{n-k}$,

где C_n^k – число сочетаний из n элементов по k; p – вероятность «успеха»; q – вероятность «неуспеха» (q = 1– p).

Данная формула называется **формулой Бернулли**.

Пример. В урне 20 белых и 10 чёрных шаров. Вынули подряд 4 шара, причём каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего, и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из четырёх вынутых шаров окажется два белых?

Решение. Вероятность извлечения белого шара p = 20/30 = 2/3 можно считать одной и той же во всех четырёх испытаниях; q = 1 – p = 1/3. Используя формулу Бернулли, получаем

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 g^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

Математическая статистика – это раздел математики, который изучает методы сбора, систематизации, обработки и использования статистических данных для принятия решений. Сущность математической статистики заключается в установлении закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления.

С каждым опытом можно связать множество всех взаимно исключающих друг друга исходов.

Это множество называется пространством элементарных исходов (ПЭИ).

Числовая функция, определенная на пространстве элементарных исходов, называется *случайной величиной.* Функция, ставящая в соответствие каждому значению x случайной величины X вероятность P(X)=x, с которой она принимает это значение, называется *законом распределения* случайной величины.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

$\boldsymbol{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n}$.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\boldsymbol{D(X) = M[X - M(X)]^2}.$$

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$\boldsymbol{D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2}$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины ***X*** называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{D(X)}}$$

Пример. Задан закон распределения дискретной случайной величины:

X	3	8	13	18	23
P	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

Вычислить: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3) среднее квадратичное отклонение.

Решение:

1) Математическое отклонение вычисляется по формуле $\boldsymbol{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n}$. Подставляя данные задачи в эту формулу, получим:

M(X)= 3·0,3 +8·0,3+13·0,1+18·0,1+23·0,1=0,9+2,4+2,6+1,8+2,3=10

2) Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$\boldsymbol{D(X) = M[X - M(X)]^2}$.

D(X)= $(3-10)^2 \cdot 0{,}3 + (8-10)^2 \cdot 0{,}3 + (13-10)^2 \cdot 0{,}2 + (18-10)^2 \cdot 0{,}1 + (23-10)^2 \cdot 0{,}1 = 14{,}7 + 1{,}2 + 1{,}8 + 6{,}4 + 16{,}9 = 41$

3) среднее квадратичное отклонение вычисляется по формуле $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{D(X)}}$

$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{D(X)}} = \sqrt{41} \approx 6{,}4$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЭКЗАМЕНУ

1. Комплексные числа. (Определение комплексного числа, определение мнимой единицы, степени мнимой единицы, равные, сопряженные комплексные числа). Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

3. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

4. Показательная форма записи комплексных чисел. Формулы Эйлера.

5. Множество и его элементы. Пустое множество, подмножества искомого множества. Операции над множествами (пересечение, объединение, дополнение).

6. Отношения, их виды и свойства. Диаграмма Эйлера-Венна.

7. Числовые множества. Основные понятия теории «графов».

8. Производная функции. Геометрический и физический смысл производной.

9. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Метод подстановки в неопределенном интеграле.

10. Определенный интеграл. Геометрический смысл определенного интеграла. Свойства определенного интеграла.

11. Определение дифференциального уравнения I-го порядка с разделяющимися переменными.

12. Линейные дифференциальные уравнения I-го порядка.

13. Неполные дифференциальные уравнения II-го порядка.

14. Линейные однородные уравнения II-го порядка с постоянными коэффициентами.

15. Дифференциальные уравнения в частных производных.

16. Определение числового ряда. Свойства рядов.

17. Признак сходимости по Даламберу.

18. Разложение подинтегральной функции в ряд. Степенные функции Маклорена.

19. Понятие комбинаторной задачи. Факториал числа.

20. Виды соединений: размещения, перестановки, сочетания и их свойства.

21. Случайный эксперимент, элементарные исходы, события.

22. Определение вероятности: классическое, статистическое, геометрическое: условная вероятность.

23. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности.

24. Случайные величины. Закон распределения, числовые характеристики.

25. Математическое ожидание, дисперсия.

Заключение

В заключение следует отметить, что контрольная работа, предусмотренная программой дисциплины «Математика», имеет цель:

- закрепить и углубить теоретические знания, полученные студентами-заочниками на учебных занятиях;
- развить навыки самостоятельной работы с учебником, дополнительной литературой, материалами Интернет.

Практические работы могут проводиться параллельно с изучением теоретической части учебного материала или после изучения темы.

Список источников

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике [Электронный ресурс]. М.: Высш. шк., 2003. –50 с.

2. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей.: Учебное пособие для студентов втузов/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров.- 5-е изд., испр.- М.: Издательский центр «Академия», 2004.-448с.

3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие для студ. вузов/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 20 с.

4. Дадаян А.А. Математика. М: Форум, 2003. – 100 с.

5. Ивлев Б.М. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса / Ивлев Б.М., С.М. Саакян, С.И. Шварцбурд.- М.:Просвещение , 2003.-192 с.

6. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Том 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 5 с.

7. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. М.: Издательский центр «Академия», 2002. – 50 с.

8. Якушева Г.М. Большая математическая энциклопедия / Г.М. Якушева и др.-М.: филол. о-во «Слово»: ОЛМА_ПРЕСС, 2004.-639 с.

ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ» В Г. РТИЩЕВО
(ФИЛИАЛ СамГУПС В Г. РТИЩЕВО)

Практическое занятие № (номер практического занятия)

по дисциплине: «Математика»

Тема: «Название темы»

Вариант № (номер варианта)

Выполнил: студент I курса
Фамилия И.О.
специальности (код специальности)
шифр (номер шифра)

Проверил:
преподаватель Фамилия И.О.

Ртищево 2018

Приложение 2

Цель: Научиться вычислять производную сложных функций, простейшие определенные интегралы

Оборудование: инструкционная карта, таблица производных элементарных функций, таблица интегралов

Содержание отчета: 1.Вычислить производную сложных функций.

2. Вычислить определенные иртегралы.

3. Ответить на контрольные вопросы.

4. Вывод.

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется сложной?
2. Что называется производной функции?
3. Каков геометрический смысл производной?
4. Как геометрически определить значение производной в точке?
5. В чем заключается механический смысл производной?
6. Что называется определенным интегралом?
7. Каков геометрический смысл определённого интеграла?
8. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
9. Запишите основные свойства определенного интеграла.
10. В чём заключается формула замены переменной интегрирования в определённом интеграле?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика: Учебник.– М.: ФОРУМ: ИНФРА – М, 2003.– 552 с.

2. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1962. – 404 с.

3. Поляков А.С. Руководство к решению задач по высшей математике (для техникумов). Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1975. – 125 с.

Отчет к работе

1. Вычислить производную сложных функций:

Производная

Правила дифференцирования:

1. C'=0;
2. x'=1;
3. (u+v-w)′=u′+v′-w′;
4. (uv)′=u′v+v′u;
5. (Cu)′=Cu′;
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$;
7. $y'_x = y'_u u'_x$

Формулы дифференцирования:

1. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
2. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
3. $(e^x)' = e^x$;
4. $(a^x)' = a^x \ln a$;
5. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
6. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;
14. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приложение 4

Интеграл

Основные формулы интегрирования:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, n≠–1;
2. $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3. $\int e^x dx = e^x + C;$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

Формула интегрирования по частям:

$$\int uv = uv - \int vdu.$$