МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ» В Г. РТИЩЕВО
(ФИЛИАЛ СамГУПС В Г. РТИЩЕВО)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.01 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

для специальности

08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство

Базовая подготовка среднего профессионального образования

2017

Рассмотрено и одобрено цикловой комиссией математических, естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин
Протокол № 1
от «31» ____ 2017 г.
Председатель ЦК
__________ Н.С. Луконина

Разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01 Прикладная математика для студентов специальности 08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство и Положения о самостоятельной работе студентов от 2014 г.

Утверждаю
Зам. директора по УР
________ А.А. Елисеева
«__» 09 2017 г.

Разработчик: __________ Н.С. Луконина, преподаватель филиала Сам ГУПС в г. Ртищево

Рецензент: Н.С. Лытаева, преподаватель филиала СамГУПС в г. Ртищево

Содержание

Введение

Методические рекомендации по внеаудиторной самостоятельной работе обучающихся разработаны в соответствии с рабочей программой дисциплины ЕН.01 Прикладная математика специальности 08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство и требованиями к результатам освоения программы подготовки специалистов среднего звена ФГОС СПО по данной специальности (базовая подготовка). Методические указания предназначены для студентов 2 курса очной формы обучения.

Цель данных методических указаний – оказать помощь студентам при выполнении самостоятельной работы и закреплении теоретических знаний по основным разделам дисциплины.

Самостоятельная работа – это вид учебной деятельности, которую студент совершает в установленное время и в установленном объеме индивидуально или в группе, без непосредственной помощи преподавателя (но при его контроле), руководствуясь сформированными ранее представлениями о порядке и правильности выполнения действий.

Учебным планом специальности 08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйстводля дисциплины ЕН.01 Прикладная математика предусмотрено 29 часов на самостоятельную работу студентов. Рабочей учебной программой дисциплины определены следующие виды самостоятельной работы: проработка конспектов лекций, учебной литературы; решение задач; подготовка отчетов по практическим работам; подготовка презентации, сообщений.

Самостоятельная работа обучающихся проводится с целью:

- формирования компетенций, предусмотренных ФГОС СПО по специальности 08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство;
- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- углубления и расширения теоретических знаний;

- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности, организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, совершенствованию и самоорганизации;
- развитию исследовательских умений.

Самостоятельная работа в зависимости от заданий может выполняться индивидуально или группой студентов. Контроль результатов ВСР обучающихся производится в письменной, устной или смешанной форме в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Наименование разделов и тем	Количество часов
Введение	**1**
Раздел 1. Линейная алгебра	**2**
Раздел 2. Основы дискретной математики	**2**
Тема 2.1. Теория множеств	2
Раздел 3. Математический анализ	**15**
Тема 3.1. Дифференциальное и интегральное исчисление	5
Тема 3.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения	4
Тема 3.3. Дифференциальные уравнения в частных производных	3
Тема 3.4. Ряды	3
Раздел 4.Основы теории вероятностей и математической статистики	**4**
Тема 4.1. Теория вероятностей	4
Раздел 5. Основные численные методы	**5**
Тема 5.1. Численное дифференцирование	2
Тема 5.2. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	2
Тема 5.3. Численное интегрирование	1
Всего	**29**

СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

Введение

Самостоятельная работа № 1 (1 час)

Тема: Математика в профессиональной деятельности

Цель: рассмотреть применение математики в профессиональной деятельности.

Самостоятельная работа: сообщение (презентация) по теме: «Математика в профессиональной деятельности» (привести примеры, задачи профессионального характера).

Форма контроля: сообщение на занятии.

Раздел 1. Линейная алгебра

Самостоятельная работа № 2 (2 часа)

Тема: Представление комплексных чисел в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Цель: научиться переводить комплексные числа из алгебраической в тригонометрическую и показательную формы.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа. Работа с литературой.

Форма контроля: проверка индивидуальной домашней работы.

Виды заданий:

1. Представить числа в тригонометрической форме.
2. Представить числа в показательной форме.

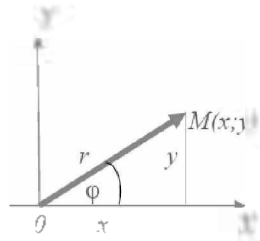
Теоретический материал. Пример выполнения работы

Число вида $z = x + i\,y$, где x и y – любые действительные числа, а i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2=-1$, называется комплексным числом.

Числа x и y называются. Соответственно. действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются: $x=Rez$, $y=Imz$.

Запись комплексного числа в виде $z=x-iy$ называется алгебраической формой комплексного числа.

Комплексное число $z=x+iy$ может быть изображено в декартовой координатной плоскости XOY либо точкой с абсциссой x и ординатой y, либо радиус-вектором этой точки:



Длина этого вектора называется модулем комплексного числа z и обозначается |z| или r: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Угол, образованный этим вектором с положительным направлением действительной оси Ox, называется аргументом числа z и обозначается $Argz$.

Величина $Arg\,z$ многозначна и определена с точностью до числа, кратного 2π. Значение $Arg\,z$, заключенное в пределах от $-\pi$ до π, называется главным и обозначается $Arg\,z$ или φ: $-\pi<arg\,z\leq\pi$, $tg\varphi = \frac{y}{x}$.

Два комплексных числа $z_1=x+iy_1$ и $z_2=x_2-iy_2$ считаются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

Два комплексных числа $z=x+iy$ и $\bar{z}=x\text{-}iy$, отличаются только знаком мнимой части, называются сопряженными.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа $z=x+iy$ имеют вид:

$z = r(cos\varphi + isin\varphi), z = re^{i\varphi}$, где r и φ – соответственно модуль и главное значение аргумента комплексного числа z.

<u>Пример</u>. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число z=3+i.

Решение:

1) Находим модуль комплексного числа:

$$|z| = r = |3 + \sqrt{3}i| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

2) Находим главное значение аргумента комплексного числа z: пак как вектор, изображающий число z лежит в I четверти и

$$tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{то } \varphi = \frac{\pi}{6}$$

3) Находим тригонометрическую форму: $z = 2\sqrt{3}(cos\varphi + isin\varphi)$.

Находим показательную форму: $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Задания для самостоятельной работы: представить в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа:

	1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
1	1-i	-1-i	-2+2i	-2-i
2	$\sqrt{3}$-i	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$ i	$-\sqrt{6}$-2i	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$ i
3	-$\sqrt{3}$+i	$-\sqrt{6}+\sqrt{2}$ i	$\sqrt{6}+\sqrt{3}$ i	$-\sqrt{3}+\sqrt{2}$ i
4	5+4i	-3+2i	5-2i	-5+2i

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, все 4 задания выполнены верно, работа оформлена подробно и аккуратно.

Оценка «4» ставится при 3 верно выполненных заданиях, работа оформлена подробно и аккуратно.

Оценка «3» ставится при выполненных верно 2 заданиях, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если домашняя контрольная работа выполнена неверно или выполнено верно 1 задание.

Литература:

1. Башмаков М. И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2012 г.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2010.

3. Григорьев В. П., Дубинский Ю. А. Элементы высшей математики: Учебник для студентов учреждений СПО – 6-е изд.– М.: Академия, 2011.

Раздел 2. Основы дискретной математики

Тема 2.1. Теория множеств

Самостоятельная работа № 3 (2 часа)

Тема: Построение совершенной нормальной дизъюнктивной и конъюнктивной формы.

Цель: закрепить навыки по выполнению действий над множествами.

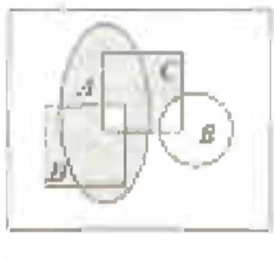
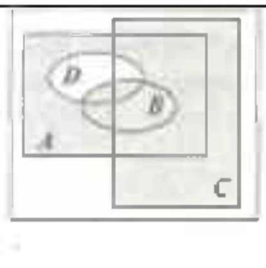
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа. Работа с литературой.

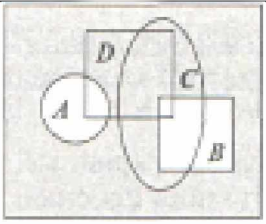
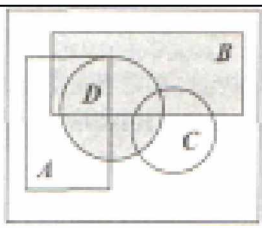
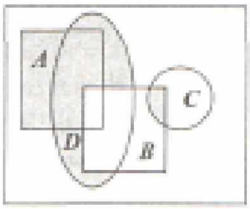
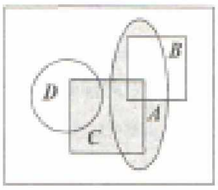
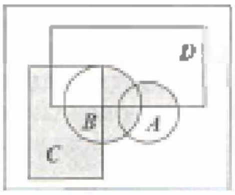
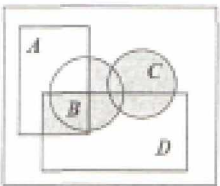
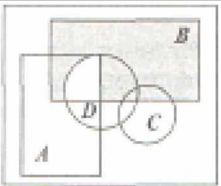
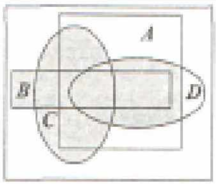
Форма контроля: проверка индивидуальной домашней работы. Проверка конспекта «Построение совершенной нормальной дизъюнктивной и конъюнктивной формы».

Виды заданий:

1. Найти разность множеств
2. Найти пересечение множеств
3. Найти объединение множеств

Варианты заданий:

№	*Задание*
1	
2	

3	D C A B
4	B D C A
5	A C D B
6	B D A C
7	D B A C
8	A C B D
9	B D C A
10	A B D C

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, все задания выполнены верно, работа оформлена подробно и аккуратно;

Оценка «4» ставится при 2 верно выполненных заданиях, работа оформлена подробно и аккуратно

Оценка «3» ставится при выполненном верно 1 задании, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если домашняя контрольная работа выполнена неверно.

Литература:

1. Белоусов А. И, Ткачев С. Б. Дискретная математика: Уч. для Вузов/ Под ред. В. С. Зарубина, А.П. Крищенко – 3-е изд., стереотип. – М.: Издательство МГТУ им Н. Э. Баумана, 2006.
2. Григорьев В. П., Дубинский Ю. А. Элементы высшей математики: Учебник для студентов учреждений СПО – 6-е изд., стер. – М.: Академия, 2011.
3. Пехлецкий И. Д. Математика: Учеб. для студентов СПО. –М.: Академия, 2010.

Раздел 3. Математический анализ

Тема 3.1. Дифференциальное и интегральное исчисление

Самостоятельная работа № 4 (2 часа)

Тема: Производная. Применение производной

Цель: закрепить навыки по вычислению производных функций первого и второго порядков, по исследованию функций с помощью производной.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка контрольной работы

Виды заданий:

1. Найти производные функций

2. Составить уравнение касательной к графику функции в заданной точке
3. Найти промежутки возрастания и убывания функции
4. Исследовать функцию и построить график

Пример выполнения работы

Обозначения: С – постоянная, x – аргумент, u, v, w – функции от x, имеющие производные.

Основные правила дифференцирования

1. $(u+v-w)'=u'+v'-w'$
2. $(u\cdot v)'=u'v+uv'$
3. $(cv)'=c\cdot v'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

Примеры:

1. $y'=(3^x-2x^5+e^2)'=(3^x)'-2\cdot(x^5)'+(e^2)'=3^x\ln 3-10x^4$
2. $y'=(2^x x^3)'=(2^x)'(x^3)+(2^x)(x^3)'=2^x\ln 2\cdot x^3+2^x\cdot 3x^2$
3. $y'=\left(\frac{x^2}{2-x^2}\right)'=\frac{(x^2)'(2-x^2)-(2-x^2)'\cdot x^2}{(2-x^2)^2}=\frac{2x(2-x^2)+2x\cdot x^2}{(2-x^2)^2}=\frac{4x}{(2-x^2)^2}$

Производная сложной функции

Пусть дана сложная функция *y=g(u), где u=f(x)*.

Если функция *u=f(x)* дифференцируема в некоторой точке *x*, а функция *y=g(u)* определена на множестве значений функции *f(x)* и дифференцируема в точке *u=f(x)*, то сложная функция *y=g(f(x))* в данной точке *x* имеет производную, которая находится по формуле $y'=g'(u)\cdot f'(x)$.

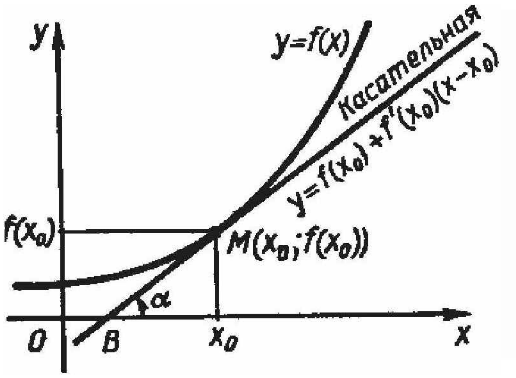
Пример: $y'=((1+x^2)^5)'=5\cdot(1+x^2)^4\cdot 2x$

Приложение производной к исследованию функций

Касательная и нормаль к плоской кривой. Скорость и ускорение.

Касательная и нормаль к плоской кривой

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке: $k=f'(x_0)=tg\alpha$.



Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ имеет вид: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания $M(x_0;f(x_0))$, называется *нормалью* к кривой.

Возрастание и убывание функции. Экстремум функции

Интервалы, на которых функция только возрастает или же только убывает, называются *интервалами монотонности* функции, а сама функция называется *монотонной* на этих интервалах.

Функция $y=f(x)$ имеет максимум $x=a$, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство $f(a)>f(x)$.

Признаки максимума:

1. $f'(a)=0$;
2. $f'(x)$ при переходе аргумента через $x=a$, меняет знак с «+» на «-».

Функция $y=f(x)$ имеет минимум $x=a$, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство $f(a)<f(x)$.

Признаки максимума:

1. $f'(a)=0$;
2. $f'(x)$ при переходе аргумента через $x=a$, меняет знак с «-» на «+».

Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;в]$. Тогда она принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на этом отрезке.

При решении этой задачи возможны два случая:

1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;

2) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается на концах отрезка [*а;в*].

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной на отрезке [а;в] функции:

1. Найти все критические точки, принадлежащие промежутку [*а;в*], и вычислить значения функции в этих точках.

2. Вычислить значения функции на концах отрезка [*а;в*], т.е. найти *f(а)* и *f(в)*.

3. Сравнить полученные результаты; наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции на отрезке [*а;в*]; аналогично, наименьшее из найденных значений есть наименьшее значение функции на этом отрезке.

<u>Например</u>. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y=x^5-5x^4+5x^3-3$ на отрезке $[-1;2]$.

Решение:

1. Находим критические точки, принадлежащие интервалу (-1; 2) и значения функции в этих точках:

$$y' =5x^4-20x^3+15x^2;\ 5x^4-20x^3-15x^2=0;\ 5x^2(x^2-4x+3)=0;$$

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3.$$

Критическая точка $x_3 = 3$ не принадлежит заданному отрезку.

2. Вычисляем значения функции в двух других критических точках:

$$y(0) = 3,\ y(1) = 4.$$

3. Вычислим значения функции на концах заданного отрезка:

$$y(-1) = -8,\ y(2) = -5.$$

4. Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что

$$\max_{[-1;2]} y = y(1) = 4,\quad \min_{[-1;2]} y = y(-1) = -8.$$

Исследование функций и построение их графиков

Схема исследования функции и построения её графика:

1) найти область определения функции и определить точки разрыва, если они имеются;
2) исследовать функцию на четность и нечетность;
3) исследовать функцию на периодичность;
4) определить точки пересечения с осями координат, если это возможно;
5) найти критические точки функции;
6) определить промежутки монотонности и экстремумы функции;
7) определить промежутки вогнутости и выпуклости кривой и найти точки перегиба;
8) найти асимптоты графика функции;
9) используя результаты исследования, соединить полученные точки плавной кривой; иногда для большей точности графика находят несколько дополнительных точек; их координаты вычисляют, пользуясь уравнением кривой.

Пример. Исследовать функцию $y=x^3-6x^2-9x-3$ и построить её график.

Решение:

1) функция определена на всей числовой прямой, т.е. $D(y) = R$;

2) $y(-x)=(-x)^3-6(-x)^2+9(-x)-3=-x^3-6x^2-9x-3$, функция не является ни четной, ни нечетной;

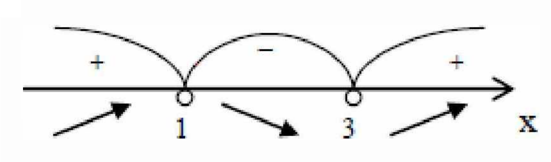
3) функция не является периодической;

4) найдем точку пересечения графика с осью OY: полагая $x=0$, получим $y=-3$; точки пересечения графика с осью OX в данном случае найти затруднительно.

5) найдем производную $f'(x)=3x^2-12x-9$; найдем критические точки

$f'(x)=0$, $3x^2-12x-9=0$, получим $x=1$ и $x=3$ – критические точки.

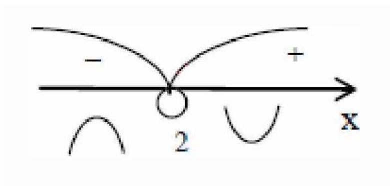
6) в промежутках $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$ $y'>0$, функция возрастает; в промежутке $(1; 3)$ $y'<0$, функция убывает.



При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x=3$ – с минуса на плюс. Значит

$$y_{max} = y(1) = 1,\ y_{min} = y(3) = -3.$$

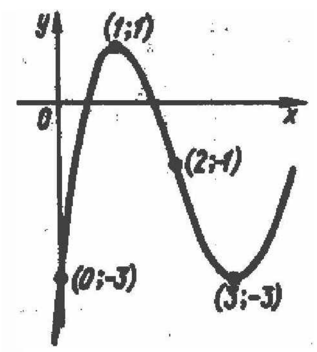
7) найдем вторую производную $y''= 6x - 12$, $y''=0$, $6x - 12= 0$, $x = 2$; в промежутке (-∞; 2) $y'' <0$, кривая выпукла вверх, в промежутке (2; +∞) $y'' >0$, кривая выпукла вниз.



Получаем точку перегиба (2;-1).

8) график функции асимптот не имеет;

9) используя полученные данные, строим искомый график.



Индивидуальная контрольная работа

1 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=cos^3(x^2+8)$;

б) $f(x)=\frac{3x^3}{(4x-2)}$

в) $f(x)=sin^3(4x^2+3x-8)$;

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = 3x - x^3$

2 вариант

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=3(x^5+7x^3-1)^4$;

б) $f(x)=\dfrac{(x^3-1)^4}{x^3}$;

в) $f(x)=4ln(x^6-5)-5x-2$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график:

$$f(x) = x^3 - 12x$$

3 вариант

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=3(5x^2-x+4)^6$;

б) $f(x)=2ln(x^6-5)$;

в) $f(x)=cos^4(4x-x^2)$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = x^3 - 12x$

4 вариант.

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=tg^4(x-x^2)$;

б) $f(x)=3^{cos5x+2}$;

в) $f(x)=(x^2-1)(x-3)^4$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = 5x - x^3$

5 вариант

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=sin^3(x\text{-}3)$;

б) $f(x)=(x^2\text{-}1)\ (x+3)$;

в) $f(x)=3^{cos5x-2}$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x)\ =\ x^3 - 3x - 1$

6 вариант

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=6(x^2+4x^3-12)^4$;

б) $f(x)=ln(x^3\text{-}4x)$;

в) $f(x)=\dfrac{4x^3}{(8x-2)^3}$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x)\ =\ 2\ -\ x^3$

7 вариант

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=cos^2(x^2-x\text{-}1)$;

б) $f(x)=2^{sin3x-2}$;

в) $f(x)=sin^3(x\text{-}3)$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x)\ =\ 1\ -\ 4x\ \text{-}\ x^3$

8 вариант

1. Найти производную функции:

а) $f(x)=(2x^6+3x^4-1)^4$;

б) $f(x)=\dfrac{(x^2+2)^4}{x^2}$;

в) $f(x)=(x^2\text{-}1)(x-3)^4$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее

график: $f(x) = x^3 - x + 3$

9 вариант

1. Найти производную функции:

а) $f(x) = (x^3 - 6)(x + 4)^2$;

б) $f(x) = \dfrac{(x^2 + 1)^2}{x^2 - 2}$;

в) $f(x) = \sin^3(4x^2 + 3x - 8)$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = 4x^3 - 6x^2$

10 вариант

1. Найти производную функции:

а) $f(x) = \sin(x^2 + 5)$;

б) $f(x) = \dfrac{(x^3 + 10)}{x^3}$;

в) $f(x) = 4\ln(x^6 - 5) - 5x - 2$.

2. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график: $f(x) = 3x^2 - x^3$

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, все 4 задания выполнены верно, построен график функции верно, работа оформлена подробна и аккуратна;

Оценка «4» ставится при 3 верно выполненных заданиях, построен график функции верно, работа оформлена подробна и аккуратна

Оценка «3» ставится при выполненных верно 2 заданиях, но исследование функции проведено верно, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если домашняя контрольная работа выполнена неверно.

Литература:

1. Башмаков М. И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего проф. Образования. – М.: Издательский центр

«Академия», 2012 г.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М., Высшая школа, 2010.
3. Григорьев В. П., Дубинский Ю. А. Элементы высшей математики: Учебник для студентлов учреждений СПО – 6-е изд., стер. – М.: Академия, 2011.
4. Пехлецкий И.Д. Математика ;Учеб. Для студентов СПО. – М.: Академия, 2010.

Самостоятельная работа № 5 (3 часа)

Тема: Интегралы

Цель: закрепить навыки по вычислению интегралов различными способами.

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Виды заданий:

1. Вычислить неопределенный интеграл
2. Вычислить определенный интеграл
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси.

Пример выполнения работы

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Пусть $y=F(x)$ имеет производную $y'=f(x)$, тогда ее дифференциал $dy=f(x)dx$.

Функция $F(x)$ по отношению к ее дифференциалу $f(x)dx$ называется первообразной.

Определение: функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Дифференциалу функции соответствует не единственная первообразная, а множество их, причем они отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Пусть $F(x)$ – первообразная для дифференциала $f(x)dx$.

Тогда: $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) - 0 = f(x)$, где C – постоянная.

Определение: совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для дифференциала $f(x)dx$ называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$, т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, C – постоянная интегрирования.

Процесс нахождения первообразной называется интегрированием.

Формулы интегрирования

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ell n|x| + c$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell n a} + c$
6. $\int e^x dx = e^x + c$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
8. $\int \cos x dx = \sin x + c$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
11. $\int tgx dx = -\ell n|\cos x| + c$
12. $\int ctgx dx = \ell n|\sin x| + c$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$
16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg \frac{x}{a} + c$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ell n\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$
18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ell n\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ell n\left|tg \frac{x}{2}\right| + c$
20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ell n\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$

Непосредственное интегрирование

При непосредственном интегрировании следует пользоваться таблицей интегралов. Интегрируя функции, содержащие переменную в знаменателе дроби или под знаком радикала, нужно вводить степень с отрицательным или дробным показателем, привести подынтегральное выражение к виду какого-либо табличного интеграла.

При интегрировании произведения в ряде случаев полезно предварительно раскрыть скобки.

Интегрирование методом подстановки

Если интеграл затруднительно привести к табличному с помощью элементарных преобразований, то в этом случае пользуются методом подстановки (методом замены переменной интегрирования).

Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной удается свести данный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

Для интегрирования методом подстановки можно использовать следующую схему:

1) часть подынтегральной функции надо заменить новой переменной;

2) найти дифференциал от обеих частей замены;

3) все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл);

4) найти полученный табличный интеграл;

5) сделать обратную замену.

2. Определенный интеграл.

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от неотрицательной функции *y=f(x)* с геометрической точки зрения равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции *y=f(x)*, слева и справа – отрезками прямых *x=a*, *x=b*, снизу отрезком *[a; b]* оси Ох.

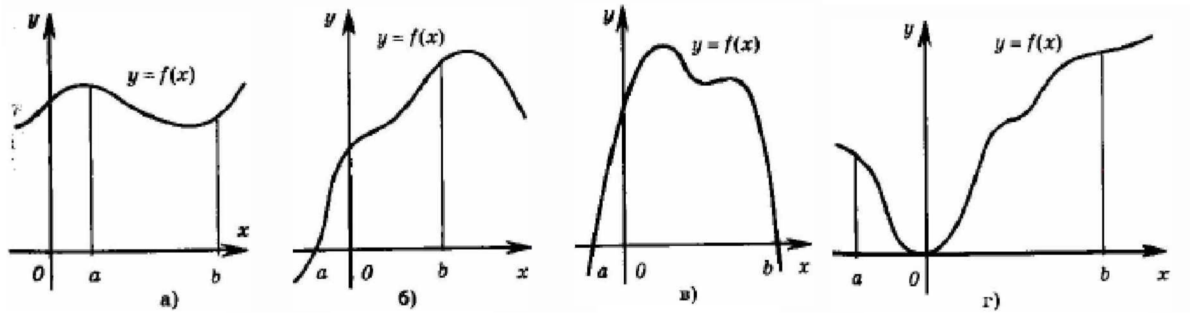
3. Приложения определенного интеграла

Вычисление площадей

Фигура, ограниченная кривой *y=f(x)*, осью абсцисс и двумя прямыми, перпендикулярными к оси абсцисс, называется *криволинейной трапецией*. Отрезок [a;b] называется основанием криволинейной трапеции. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках *а-г*.

Площадь фигуры, ограниченной кривой *y=f (x)*, где $f(x) \geq 0$, осью *OX* и двумя прямыми *x = a и x = b*, выражается определенным интегралом:

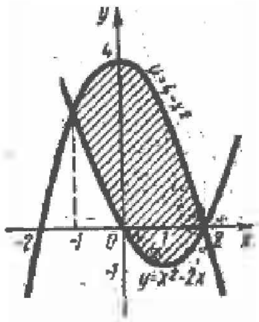
$$S = \int_a^b f(x)dx$$



а) б) в) г)

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.

Решение:



Найдем пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$. Для этого решим систему $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

Имеем $4 - x^2 = x^2 - 2x$, $2x^2 - 2x - 4 = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad x_1 = -1,\ x_2 = 2$$

Искомую площадь вычисляем по формуле $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$

$$S = \int_{-1}^{2}(4 - x^2 - x^2 + 2x)dx = \int_{-1}^{2}(4 - 2x^2 + 2x)dx = 4\int_{-1}^{2}dx - 2\int_{-1}^{2}x^2dx + 2\int_{-1}^{2}xdx =$$

$$= 4x\Big|_{-1}^{2} - 2\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + 2\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} = 4(2+1) - \frac{2}{3}(8+1) + 4 - 1 = 12 - 6 + 3 = 9$$

S = 9 кв.ед.

Индивидуальная домашняя работа

1. Найдите неопределенные интегралы:

1. $\int(4x2\ +\ 4x-\ )dx$
2. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{x}}dx$
3. $\int \frac{t^2dt}{\sqrt[5]{5-2t^3}}$
4. $\int \frac{1-6x+4x^2}{x^2}dx$
5. $\int 3^{2+x^2}xdx$

16. $\int \frac{xdx}{2\sqrt{x}}$
17. $\int(3x^5 - \cos x - 1)dx$
18. $\int(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x})dx$
19. $\int(2^x - 3e^x + x)dx$
20. $\int \frac{x^{-\frac{1}{2}}+2}{\sqrt{x}}dx$

6. $\int \frac{5-\sqrt[3]{x^2}}{x}dx$

7. $\int x \cdot 2^{x^2}\, dx$

8. $\int \frac{x^{-\frac{1}{3}}-1}{\sqrt[3]{x^2}}$

9. $\int \sqrt[4]{(2-\sin x)^3}\cos x dx$

10. $\int (\frac{x}{3}-\frac{3}{x}+5e^x)dx$

11. $\int \frac{2-\sqrt[3]{x}}{x^3\sqrt{x^2}}dx$

12. $\int \frac{x\sqrt{x}-x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}dx$

13. $\int (9x^8-3e^x+\frac{5}{\cos^2 x})dx$

14. $\int (3x^3-4)^2\, x^2 dx$

15. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^3}$

21. $\int (\frac{1}{5\cos^2 x}-\frac{x}{2}+\frac{2}{x})dx$

22. $\int \frac{3x^2 dx}{(2-x^3)^4}$

23. $\int (2-\frac{1}{3\sin^2 x}-x^2)dx$

24. $\int \frac{x^2-2x+3}{x\sqrt{x}}dx$

25. $\int (5^x-1)(5^{-x}+1)dx$

26. $\int \frac{\cos^2 x+3}{\cos^2 x}dx$

27. $\int \cos^4 x \sin x dx$

28. $\int \frac{7+2x\sin^2 x}{\sin^2 x}$

29. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos x}$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x+1)^3}}$

2. Найдите определенные интегралы:

1. $\int_1^8 (4x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\cos x dx$

3. $\int_0^2 \frac{4x dx}{\sqrt{1+2x^2}}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(2-\cos x)^2}$

5. $\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$

6. $\int_0^1 x^2\, e^{x^3+1}dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x-\sin x)dx$

8. $\int_0^4 \left(1-\sqrt{x}\right)^2 dx$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3-2\sin x)^3\cos x dx$

16. $\int_6^{6\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+36}$

17. $\int_0^2 (2-x)^2 dx$

18. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^4+16}\cdot x^3\, dx$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x}$

20. $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

21. $\int_0^4 \left(x^2-2\sqrt{x}\right)dx$

22. $\int_{-\frac{2}{3}}^0 (4+6x)^3 dx$

23. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$

24. $\int_0^1 (5-2x^3)\, x^2 dx$

10. $\int_1^2 \frac{1-x^6}{x^5} dx$25.$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4+5\sin x} \cos x dx$

11. $\int_1^8 \left(3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$

26.$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[4]{(1+15x^2)^3}}$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{(8-7\sin x)^2}}$

27.$\int_1^3 2e^{2x} dx$

13. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{7x^3+1}}$

28. $\int_1^9 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x + \frac{\pi}{3}) dx$

29. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \sin x dx$

15. $\int_0^1 \frac{6x^2 dx}{1+2x^3}$

30. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{2\sqrt{1+x^2}}$

3. Сделайте чертеж и вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

1) $y = 3x-1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$

2) $x - 2y - 4 = 0$, $x - y - 5 = 0$, $y = 0$

3) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$

4) $y = 9 - x^2$, $y = 0$

5) $y = 4x - x^2$, $y = 0$

6) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$

7) $y = x^2$, $5x - y - 6 = 0$

8) $y = x^2$, $x = y^2$

9) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x$

10) $y = -x^2 - 6$, $y = 2x - 3$

4. Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной данными линиями:

1) $y^2 = 6x$, $y = 0$, $x = 1$, $x=3$

2) $y^2 = 4(x-2), y = 0, x = 3, x = 6$

3) $y = x^2 - 4$, $x = 0$

4) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$

5) $y^2 = 4x$, $y = x$

6) $y = 4 - x^2$, $x - y + 2 = 0$

5. Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси *ОУ* фигуры, ограниченной данными линиями:

1) $y = x^2$, $y = 1$, $y = 4$, $x = 0$

2) $y = x^2 - 1$, $y = 5$

3) $y^2 = 9x$, $y = 3x$

4) $y^2 = 2x$, $2x - 2y - 3 = 0$

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, все 4 задания выполнены верно, верно построены график функции при нахождении площади фигуры и объема тела, работа оформлена подробно и аккуратно;

Оценка «4» ставится при 3 верно выполненных заданиях, верно построены график функции при нахождении площади фигуры и объема тела, работа оформлена подробно и аккуратно

Оценка «3» ставится при выполненных верно 2 заданиях, но выполнено верно хотя бы одно из заданий по нахождению площади фигуры или объема тела с помощью интеграла, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если домашняя контрольная работа выполнена неверно или выполнено верно 1 задание.

Литература:

1. Башмаков М. И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего проф. Образования – М.: Издательский центр «Академия», 2012 г.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2010.
3. Григорьев В. П., Дубинский Ю. А. Элементы высшей математики: Учебник для студентлов учреждений СПО – 6-е изд., стер.– М.: Академия, 2011.
4. Пехлецкий И.Д. Математика; учеб. для студентов СПО. –М.: Академия, 2010.

Тема 3.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Самостоятельная работа № 6 (4 часа)

Тема: Обыкновенные дифференциальные уравнения

Цель: закрепление навыков решения дифференциальных уравнений

Теоретическая часть

Дифференциальное уравнение – это равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.

Общий вид дифференциального уравнения: $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ – неявная форма, где x – независимая переменная; y – неизвестная функция; y' – ее производная первого порядка и т.д.

Если из уравнения можно выразить y', то оно примет вид: $y'=f(x, y)$ – явная форма. Это уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.

Порядок n старшей производной, входящей в уравнение, называется *порядком уравнения.*

Всякая функция, подстановка которой вместе с ее производной в дифференциальное уравнение обрашает его в тождество, называется *решением* уравнения.

Общее решение – это решение, зависящее от произвольных постоянных. Оно содержит столько независимых переменных, каков порядок уравнения. *Общее решение* дифференциального уравнения - семейство функций $y = (x, C)$, удовлетворяющее этому уравнению при произвольном значении постоянных С.

Например, для дифференциального уравнения $xy' - 2x^2 = 0$ функция $y=x^2$ будет решением, так как при ее подстановке левая часть уравнения тождественно обращается в нуль: $x \cdot 2x - 2x^2 = 0$.

Частное решение – это решение, получающееся из общего решения при конкретных определенных значениях произвольных постоянных $y=(x,C_0)$.

Уравнение первого порядка $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если функции P и Q разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

$$f_1(x)\, f_2(y)dx + \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)dy = 0.$$

В таком уравнении после деления его членов на $f_2(y)\varphi_1(x)$ переменные разделяются: $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0$, и каждый член уравнения зависит от одной переменной.

Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка – это уравнение вида: $y' - P(x)y = q(x)$, где $P(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции.

Название уравнения «линейное» связано с тем, что неизвестная функция и ее производная входят в первой степени, т.е. линейно.

Линейное однородное уравнение будет, если $q(x)=0$, т.е. это уравнение вида: $y' - P(x)y = 0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными и его решение будет иметь вид: $y = C\, e^{-\int P(x)dx}$.

Линейное неоднородное уравнение будет, если функция $q(x)$ не равна тождественно нулю $q(x)\neq 0$: $y'+P(x)y=q(x)$.

Общее решение линейного уравнения первого порядка находится методом вариации постоянной и имеет вид:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

Уравнения вида $a_0\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2y = 0$ называются *линейными однородными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Общий интеграл находится с помощью характеристического уравнения $a_0k^2 - a_1k - a_2 = 0$, которое получается из этого уравнения, если, сохраняя в нем все коэффициенты a_i, заменить функцию у единицей ($y=1$), а все ее производные – соответствующими степенями k. При этом:

1. Если все корни характеристического уравнения *действительные и различные*, то общий интеграл имеет вид: $y=C_1 e^{k_1x} + C_2 e^{k_2x}$.
2. Если характеристическое уравнение имеет корни *действительные и равные* ($k_1 = k_2 = k$), то $y = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx}$.
3. Если корни *мнимые* ($k=\pm bi$), то $y = C_1 cosbx + C_2 sinbx$.
4. Если корни *комплексные* ($k=a\pm bi$), то $y = e^{ax}(C_1 cosbx + C_2 sinbx)$.

Задания:

1. Выучить определения.
2. Найти решения дифференциальных уравнений:

1. $xy' = y$;
2. $y' + (2y+1)ctgx = 0$.
3. $y\ln y + xy' = 0$.
4. $y'' + 9y = 0$.

Тема 3.3. Дифференциальные уравнения в частных производных

Самостоятельная работа № 7 (3 часа)

Тема: Дифференциальные уравнения в частных производных

Цель: получить представление о дифференциальных уравнениях в частных производных.

Самостоятельная работа: доклад по теме: Основные определения теории уравнений в частных производных.

Самостоятельная работа: работа с литературой

Форма контроля: доклад на занятии.

Требования к докладу

Доклад – публичное сообщение, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему. Это работа, требующая навыков работы с литературой. Студент должен не только выбрать тему доклада, исходя из своих интересов, но и суметь подобрать литературу, выбрать из нее наиболее существенное, переложить своими словами и изложить в определенной последовательности. Доклад должен быть с научным обоснованием, доказуем.

Написание доклада является достаточно сложной работой и требует уже сформировавшихся умений и навыков работы с литературой, особой мыслительной деятельности, знаний правил оформления. Доклад требует плана, по которому он выполняется. При оценке доклада учитываются его содержание, форма, а также и культура речи докладчика.

Критерии оценивания:

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, материал в полной мере соответствует заявленной теме, выполнены чертежи к теоремам, докладчик излагает материал самостоятельно;

Оценка «4» ставится при хорошем раскрытии темы доклада, выполненных чертежах к теоремам, обучающийся излагает материал не самостоятельно.

Оценка «3» ставится при раскрытии темы не полностью, докладчик неуверенно излагает свои тезисы, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если тема доклада не раскрыта.

Тема 3.4. Ряды.

Самостоятельная работа № 8 (3 часа)

Тема: Ряды

Цель: закрепление навыков нахождения пределов с использованием двух замечательных пределов.

Теоретическая часть

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n$ называется *числовым рядом*.

Суммы $S_n=u_1-u_2+\ldots-u_n=\sum_{i=1}^{n} u_n$, $n=1, 2, \ldots$ называются *частными (частичными) суммами* ряда.

Ряд $u_1+u_2-\ldots-u_n=\sum_{i=1}^{n} u_n$ называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частных сумм.

Сумма сходящегося ряда – предел последовательности его частных сумм: $\lim S_n = S, S = \sum_{i=1}^{n} u_n$.

Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется *расходящимся* и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Признак сходимости Даламбера:

1. Если $u_n > 0$.
2. Существует $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, тогда при *l<1* ряд сходится, при *l>1* – ряд расходится, при *l=1* – признак Даламбера ответа не дает.

Признак Коши

1. Если $u_n > 0$.
2. Существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, тогда при *l<1* ряд сходится, при *l>1* – ряд расходится, при *l=1* – признак Даламбера ответа не дает.

Задания:

1. Исследовать на сходимость ряд, применяя признак Даламбера: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2}$
2. Исследовать ряд на сходимость, применяя первый признак сравнения: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{5^n+1}{2^n}$
3. Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Коши: $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$

Раздел 4. Основы теории вероятностей и математической статистики

Тема 4.1. Теория вероятности

Самостоятельная работа № 9 (4 часа)

Тема: Теория вероятностей

Цель: отработать навыки по вычислению вероятностей событий по классической формуле определения вероятности

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания
к выполнению заданий

Классическое определение вероятности

Пусть некоторый опыт может приводить лишь к одному из конечного множества результатов. Эти результаты будем называть *элементарными исходами.* Предположим, что элементарные исходы удовлетворяют следующим условиям:

1. Образуют полную группу, т.е. в каждом испытании обязан появиться какой-нибудь из этих исходов;
2. Попарно несовместны, т.е. два различных элементарных исхода не могут появиться в одном испытании;
3. Равновозможные, т.е. шансы на появление у всех элементарных исходов одинаковы.

В этих условиях может использоваться классическое определение вероятности.

Элементарные исходы, в которых появляются интересующее нас событие, называются *благоприятными* этому событию.

Вероятностью события А называются число *P(A)*, равное отношению числа исходов испытания, благоприятствующих событию *A* к общему числу исходов: $P(A) = \frac{m}{n}$, где n – общее число исходов испытания, m – число исходов, благоприятствующих событию *A*.

Пример: Бросается один раз игральная кость. Какова вероятность выпадения нечетного числа очков?

Решение: Опыт состоит в бросании игральной кости 1 раз и наблюдении за числом очков, появившихся на верхней грани.

Все исходы опыта: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Число всех исходов: n = 6.

Рассмотрим событие А – выпало нечетное число очков. Исходы благоприятствующие А: 1, 3, 5.

Число исходов, благоприятствующих А : m = 3

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пример: Ребенок играет с шестью буквами разрезной азбуки А, В, К, М, О, С. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд получится слово «МОСКВА»?

Решение: Опыт состоит в случайном расположении шести букв в ряд. Все исходы опыта – множество перестановок из шести различных букв.

Число всех исходов: n = P_6=6! = 1 2 3 4 5 6=720.

Рассмотрим событие А – при случайном расположении шести букв в ряд получено слово «МОСКВА». Очевидно, что такое расположение букв единственно, т.е. m=1. Найдем вероятность события А: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$.

Пример: В ящике находится 20 деталей, из них 8 бракованных. Из ящика наудачу извлекают 5 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажутся две бракованные детали.

Решение: Опыт состоит в выборе наудачу 5 деталей из 20. Все исходы опыта – множество сочетаний из 20 деталей (находящихся в ящике) по 5.

Число всех исходов опыта $n \quad = C_{20}^5 = \frac{20!}{5! \cdot 15!}$

Рассмотрим событие А – среди 5 деталей, извлеченных из ящика, две бракованные.

Если среди 5 деталей две бракованные, то остальные 3 небракованные. Тогда число исходов, благоприятствующих

событию А, можно найти по принципу умножения. Нужно выполнить одно за другим два действия: из 8 бракованных выбрать 2 детали и затем из 12 небракованных выбрать 3 детали. Первое действие можно выполнить $n_1 = C_8^2$ второе действие можно выполнить $n_2 = C_{12}^3$ способами. Итак,

$m = n_1 n_2 = C_8^2 C_{12}^{13}$.

Найдем вероятность события А:

$$P(A) = \frac{C_8^2 C_{12}^{13}}{C_{20}^5} = \frac{\frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{12!}{3!9!}}{\frac{20!}{5!\cdot 15!}} \approx 0{,}397.$$

Задачи на классическое определение вероятности

Буквой *А* обозначаем событие, фигурирующее в условии задачи.

Задача. Корреспонденция разносится в *5* адресов. Разносчик забыл дома очки и разнес корреспонденцию случайным образом. Какова вероятность того, что вся корреспонденция попала к своимадресатам?

Решение. Элементарным событием является перестановка из *5* адресов. Их число равно P_5По смыслу задачи все они равновероятны. Поэтому *P(A)= 1 120.*

Задача. Цифры *0,1,2,3* написаны на четырех карточках. Карточки расположили в случайном порядке. Какова вероятность того, что из них сложено 4-х-значное число?

Решение. Элементарным событием является перестановка из 4 карточек. Их всего 4!. Поскольку четырехзначное число не может начинаться с нуля, то событие *А* состоит из тех перестановок, которые начинаются с карточки с не равной нулю цифрой. Их всего *4!-3!=18.* Поэтому *P(A)= 18 4! =18 24=3 4.*

Задача. В хоккейном турнире участвуют 6 равных по силе команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. У Вас есть любимая команда. Вы пришли «поболеть» на турнир на одну из игр, выбранных случайно. Какова вероятность того, что в этой игре будет играть Ваша любимая команда?

Решение. Общее число проведенных игр равно C_6^2*=15.* Любимая команда участвует в *5* играх из *15*. Поэтому *P(A)= 5 15 = 1 3.*

Задача. В ящике разложено *20* деталей. Известно, что *5* из них являются стандартными. Рабочий случайным образом берет *3* детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна деталь стандартная?

Решение. Элементарным событием является сочетание из *20* деталей по *3*. Количество таких сочетаний равно C_{20}^{3}. В соответствии с решением задачи *11*, число сочетаний, содержащих хотя бы одну стандартную деталь равно $C_{20}^{3} - C_{15}^{3} = 685$. Поэтому $P(A) = \frac{685}{C_{20}^{3}} = \frac{137}{228}$.

Задача. Из *7* карточек разрезной азбуки составлено слово *колокол*.Эти карточки рассыпали и затем собрали в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово *колокол*?

Решение. На карточках имеется *3* буквы *о*, *2* буквы *к*, *2* буквы *л*. Поэтому, первая буква слова *колокол* может быть выбрана двумя способами, вторая – 3 способами, третья – 2 способами. При уже выбранных первых трех буквах четвертая буква может быть выбрана еще 2 способами (поскольку одна буква *о* уже выбрана). Остальные буквы могут быть выбраны только одним способом. Таким образом, число перестановок карточек, реализующих слово *колокол* равно произведению чисел *3, 2, 2, 2*, т.е. равен *24*. Общее число перестановок карточек равно *7!*. Поэтому $P(A) = \frac{24}{7!}$

Варианты заданий:

1. Из ящика, в котором 10 белых и 6 черных шаров, берут наудачу 3 шара. Какова вероятность того, что один из них белый, а два черных?
2. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры, запомнив лишь, что они различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры?
3. 25 экзаменационных билетов содержат по две вопроса, которые не повторяются. Студент подготовил 45 вопросов. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет состоит из подготовленных

им вопросов?

4. В мастерскую для ремонта поступило 15 телевизоров. Известно, что 6 из них нуждаются в общей регулировке. Мастер берет первые попавшиеся 5 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в общей регулировке.
5. Из колоды в 52 карты берется наугад 4 карты. Найти вероятность того, что среди этих 4 карт будут представлены все четыре масти.
6. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди них находится трехтомник А.С.Пушкина. Некто взял наудачу с полки 5 книг. Найти вероятность того, что среди этих пяти книг есть трехтомник Пушкина.
7. Секретных замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов с различными цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что образуют определенное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок откроется.

Виды самостоятельной работы студентов:

1. Работа над учебным материалом: Глава 16, § 93 - 94; (Богомолов, Н. В. Математика: учеб. для ссузов. – М.: Дрофа, 2012) – чтение текста, конспектирование текста.
2. Реферат на тему «Доверительный интервал и доверительная вероятность».
3. Решение типовых задач.
   1) В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.
   2) В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика вынули два шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.
   3) В урне 9 белых и 1 черный шар. Вынули сразу три шара. Какова

вероятность того, что все шары белые?

4) Вероятность того, что в течение дня произойдет неполадка станка, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течение четырех дней подряд не произойдет ни одной неполадки?
5) В лотерее 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 200 рублей и двадцать выигрышей по 50 рублей. Пусть X – величина возможного выигрыша для человека, имеющего один билет. Составить закон распределения этой случайной величины X.
6) Случайная величина X задана законом распределения:

1	4	6
0,1	0,6	0,3

Найти ее математическое ожидание.

Раздел 5. Основные численные методы

Тема 5.1. Численное дифференцирование

Самостоятельная работа № 10 (2 часа)

Тема: Численное дифференцирование

Цель: получить представление о вкладе в развитие математики Эйлера; расширить знаний о применение дифференциальных уравнений

Самостоятельная работа: работа с литературой

Задание: подготовка сообщений «Эйлер – вклад в развитие математики», «Рунге-Кутт – вклад в развитие математики»

Форма контроля: сообщение на занятии

Тема 5.2. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Самостоятельная работа № 11 (2 часа)

Тема: Применение дифференциальных уравнений

Цель: получить представление о вкладе в развитие математики Эйлера; расширить знаний о применение дифференциальных уравнений

Самостоятельная работа: работа с литературой

Задание: подготовить сообщение на тему «Применение дифференциальных уравнений»

Форма контроля: сообщение на занятии

Тема 5.1. Численное интегрирование

Самостоятельная работа № 12 (1 час)

Тема: Применение интегралов

Цель: получить представление о вкладах великих ученых в развитие математики: Ньютон, Лагранж, Котес; расширить знания о применении определенных интегралов

Самостоятельная работа: работа с литературой

Задание: подготовка сообщений «Ньютон – вклад в развитие математики», «Лагранж – вклад в развитие математики», «Котес – вклад в развитие математики», «Применение определенных интегралов»

Форма контроля: сообщение на занятии

Заключение

При реализации ФГОС СПО большую роль отводят внеаудиторной самостоятельной работе обучающихся.

Представленные методические рекомендации носят прикладной характер. В них включены темы, время выполнения и виды контроля знаний студентов обучающихся по специальности 08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство. Данная тематика самостоятельной работы студентов полностью соответствует знаниям и умениям, заявленным в ФГОС по специальности 08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство и содержит материал, направленный на формирование общих и профессиональных компетенций. Тематика внеаудиторной самостоятельной работы достаточно разнообразна.

Индивидуальный подход в планировании внеаудиторной работы каждого студента ведет к формированию личностных качеств обучающегося, способствует повышению его мотивации к изучению дисциплины.

При изучении дисциплины «Прикладная математика» данные методические рекомендации применяются для выполнения внеаудиторной работы обучающихся, что позволяет:

- оптимально сочетать теоретические и практические составляющиеобучения. При этом обеспечивается переосмысление места и роли теоретических знаний, их упорядочивание, что, в конечном счёте, приводит к повышению мотивации обучающихся в их освоении.
- возрастает учебная дисциплина обучающихся;
- выполнение внеаудиторной работы готовит обучающихся к экзамену по дисциплине.

РЕЦЕНЗИЯ

на методические указания по выполнению самостоятельных работ по учебной дисциплине *ЕН.01 Прикладная математика*

Методические указания для студентов по выполнению самостоятельной внеаудиторной работы разработаны преподавателем Лукониной Н.С. на основе рабочей программы учебной дисциплины Прикладная математика для студентов специальности 08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство (базовая подготовка среднего профессионального образования), рассмотрены и обсуждены на заседании цикловой комиссии. Данная разработка соответствует государственным требованиям к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников.

Материалы самостоятельной внеаудиторной работы представляют собой логическое продолжение аудиторных занятий. В указаниях содержится введение, тематический план, содержание самостоятельных работ, заключение, лист согласования. При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу используется дифференцированный подход к студентам. Работа структурирована, последовательна, логична. Все материалы могут быть использованы преподавателями математики, работающими в системе профессионального образования. Рекомендации могут оказать действенную помощь студентам в выполнении внеаудиторной самостоятельной работы.

Рецензент: Н.С. Лытаева, преподаватель филиала СамГУПС в г. Ртищево

Лист согласования

Дополнения и изменения к ВСР на 2018-2019 учебный год

Дополнения и изменения к ВСР на 2018-2019 учебный год по дисциплине *ЕН.01 Прикладная математика* для специальности *08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство*

На 2018-2019 учебный год изменений к ВСР по дисциплине *ЕН.01 Прикладная математика* для специальности *08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство* нет.

Дополнения и изменения в методические указания по выполнению самостоятельных работ обсуждены на заседании ЦК математических, естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин

«31» августа 2018 г. (протокол № 1).

Председатель ЦК ________ /Н.С. Луконина/

Лист согласования

Дополнения и изменения к ВСР на 2019-2020 учебный год

Дополнения и изменения к ВСР на 2019-2020 учебный год по дисциплине *ЕН.01 Прикладная математика* для специальности *08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство*

На 2019-2020 учебный год изменений к ВСР по дисциплине *ЕН.01 Прикладная математика* для специальности *08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство* нет.

Дополнения и изменения в методические указания по выполнению самостоятельных работ обсуждены на заседании ЦК математических, естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин

«31» августа 2019 г. (протокол № 1).

Председатель ЦК ______________ /Н.С. Луконина/

Лист согласования

Дополнения и изменения к ВСР на 2020-2021 учебный год

Дополнения и изменения к ВСР на 2020-2021 учебный год по дисциплине *ЕН.01 Прикладная математика* для специальности *08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство*

На 2020-2021 учебный год изменений к ВСР по дисциплине *ЕН.01 Прикладная математика* для специальности *08.02.10 Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство* нет.

Дополнения и изменения в методические указания по выполнению самостоятельных работ обсуждены на заседании ЦК математических, естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин

«__31__» __августа__ 2020 г. (протокол № __1__).
Председатель ЦК ________ /Н.С. Лытаева/